PÔLE DE RÉFLEXION ET D'ANIMATION PÉDAGOGIQUE
(PRAP)

ÉLÉMENTS DE STATISTIQUE EN CLASSE DE SECONDE TECHNIQUE ÉCONOMIE

SOMMAIRE

EcoMath
Lycée Technique
Bamako - Mali

INTRODUCTION

Le mot **"statistiques"** désigne à la fois un recueil des données d'observation, concernant par exemple la connaissance des Etats ou des sociétés humaines, et les méthodes de traitement et de d'interprétation.

Au 18^{e} siècle s'imposera l'idée que les statistiques pouvaient servir de base à des précisions, notamment en démographie et, au **19^{e} siècle** le belge **Adolphe QUETELET** fonda l'étude des traitements de données statistiques sur le calcul des probabilités.

Le traitement d'un bon nombre de problèmes économiques nécessite l'utilisation des méthodes de la statistique. Ainsi, un élève d'une classe d'économie doit savoir organiser et représenter des données fournies à l'état brut, les analyser, faire des tableaux, des graphiques, et.

Activités introductive

L'enquête porte sur un échantillon.

Exemple de collecte : Une enquête réalisée auprès des familles de quelques élèves du lycée technique a donné les résultats suivants :

Famille 1 : Nombre de personnes : **8**

Sexe féminin : 5 ; âges respectifs : 32 ; 17 ; 13 ; 11 ; 8 ans
Sexe masculin : 3 ; âges respectifs : 45 ; 15 ; 3
Nombre d'enfants par femme : 6 (4F et 2G)

Famille 2 : Nombre de personnes : **13**

Sexe féminin : 5; âges respectifs : 46 ; 20 ; 15 ; 12 ; 9 ans
Sexe masculin : 8 ; âges respectifs : 50 ; 23 ; 22 ; 21 ; 20 ; 18 ; 14 ; 13 ans
Nombre d'enfants par femme : 4 (2F et 2G)

Famille 3 : Nombre de personnes : **12**

Sexe féminin : 4; âges respectifs : 40 ; 7 ; 3 ; 14 ans
Sexe masculin : 8 ; âges respectifs : 52 ; 9 ; 5 ; 6 ; 18 ; 23 ; 20 ; 22 ans
Nombre d'enfants par femme : 10 (3F et 7G)

Famille 4 : Nombre de personnes : **13**

Sexe féminin : 5; âges respectifs : 40 ; 24 ; 19 ; 18 ; 2
Sexe masculin : 8 ; âges respectifs : 61 ; 33 ; 33 ; 28 ; 22 ; 18 ; 11 ; 5 ans
Nombre d'enfants par femme : 4 (4) et 3 (1F et 2G)

Famille 5 : Nombre de personnes : **8**

Sexe féminin : 3; âges respectifs : 43 ; 17 ; 1 ans
Sexe masculin : 5 ; âges respectifs : 45 ; 14 ; 18 ; 9 ; 7 ans
Nombre d'enfants par femme : 5 (2F et 3G)

Famille 6 : Nombre de personnes : **7**

Sexe féminin : 4 ; âges respectifs : 47 ; 8 ; 12 ; 3 ans
Sexe masculin : 3 ; âges respectifs : 58 ; 18 ; 90
Nombre d'enfants par femme : 4 (3F et 1G)

Famille 7 : Nombre de personnes : **5**

Sexe féminin : 2 ; âges respectifs : 42 ; 19 ans
Sexe masculin : 3 ; ages respectifs : 52 ; 10 ; 5 ans
Nombre d'enfants par femme : 3 (1F et 2G)

Famille 8 : Nombre de personnes : **12**

Sexe féminin : 8; âges respectifs : 45 ; 25 ; 21 ; 18 ; 16 ; 13 ; 40 ; 38 ans
Sexe masculin : 4 ; âges respectifs : 60 ; 20 ;12 ; 10 ans
Nombre d'enfants par femme : 8 (5F et 3G)

Famille 9 : Nombre de personnes : **13**

Sexe féminin : 7 âges respectifs : 45 ; 19 ; 15 ; 13 ; 18 ; 80 ; 75
Sexe masculin : 6; âges respectifs : 50 ; 23 ; 17 ; 23 ; 18 ; 11 ans
Nombre d'enfants par femme : 6 (3G et 3F)

<u>Famille</u> 10 : Nombre personnes : **10**

Sexe féminin : 4 âges respectifs : 40 ; 26 ; 5 ; 4 ans
Sexe masculin : 5 ; âges respectifs : 55 ; 26 ; 23 ; 22 ; 20 ans
Nombre d'enfants par femme : 2 (2F)

<u>Famille</u> 11 : Nombre de personnes : **11**

Sexe féminin : 3 ; âges respectifs : 39 ; 14 ; 11 ans
Sexe masculin : 8 ; âges respectifs : 43 ; 16 ; 9 ; 7 ; 5 ; 2 ; 70 ; 27
Nombre d'enfants par femme : 3 (1F et 2G)

<u>Famille</u> 12 : Nombre de personnes : **12**

Sexe féminin : 4; âges respectifs : 39 ; 26 ; 17 ; 11 ans
Sexe masculin : 8 ; âges respectifs : 52 ; 38 ; 24 ; 22 ; 21 ; 17 ; 15 ; 6 ans
Nombre d'enfants par femme : 5 (3F et 2G)

<u>Famille</u> 13 : Nombre de personnes : **16**

Sexe féminin : 9; âges respectifs : 21 ; 23 ; 17 ; 15 ; 3 ; 9 ; 41 ; 45 ; 1 ans
Sexe masculin : 7 ; âges respectifs : 48 ; 23 ; 21 ; 19 ; 11 ; 25 ;17 ans
Nombre d'enfants par femme : 8 (3F et 5G) ; 5 (1G et 4F).

<u>Famille</u> 14 : Nombre de personnes : **27**

Sexe féminin : 12 ; âges respectifs : 60 ; 54 ; 50 ; 46 ; 49 ; 10 ; 38 ; 22 ; 20 ; 16 ; 18 ; 14 ans
Sexe masculin : 15 ; âges respectifs : 59 ; 26 ;17 ; 66 ; 54 ; 63 ;15 ; 24 ; 25 ; 27 ; 20 ; 16 ; 12 ; 10 ; 38 ans
Nombre d'enfants par femme : 5 (2F et 3G) ;7 (5G et 2F).

<u>Famille</u> 15 : Nombre de personnes : **8**

Sexe féminin : 4 ; âges respectifs : 45 ; 19 ; 9 ; 5 ans
Sexe masculin : 4 ; âges respectifs : 61 ;17 ; 13 ; 5 ans
Nombre d'enfants par femme : 2 (2F).

<u>Famille</u> 16 : Nombre de personnes : **7**

Sexe féminin : 3 ; âges respectifs : 16 ; 27 ; 43 ans
Sexe masculin : 4 ; âges respectifs : 56 ; 20 ; 15 ; 13
Nombre d'enfants par femme : 3 (1F et 2G).

<u>Famille</u> 17 : Nombre de personnes : **32**

Sexe féminin : 19 ; âges respectifs : 45 ; 26 ; 23 ; 22 ; 21 ; 20 ; 20 ; 19 ; 18 ; 17 ; 13 ; 12 ; 11 ; 10 ; 9 ; 6 ; 5 ; 4 ; 4 ; 3 ans
Sexe masculin : 13 ; âges respectifs : 40 ; 34 ; 29 ; 25 ; 24 ; 20 ; 17 ; 19 ; 4 ; 8 ; 7 ; 2 ; 1 ans
Nombre d'enfants par femme : 8 (5G et 3F) ; 6 (2 G et 4F) ; 3 (2F et 1G).

<u>Famille</u> 18 : Nombre de personnes : **37**

Sexe féminin : 15 ; âges respectifs : 69 ; 25 ; 23 ; 23 ; 20 ; 69 ; 52 ; 40 ; 34 ; 31 ; 17 ; 12 ; 33 ; 6 ; 2 ans.
Sexe masculin : 22 ; âges respectifs : 67 ; 58 ; 49 ; 48 ; 46 ; 43 ; 37 ; 37 ; 35 ; 30 ; 29 ; 27 ; 26 ; 25 ; 24 ; 19 ; 18 ; 17 ; 15 ; 3 ; 1 ; 1 ans
Nombre d'enfants par femme : 5 (3F et 2G) ; 8 (6G et 2F) ; 3 (1G et 2F) ; 6 (4F et 2G)

<u>Famille</u> 19: Nombre de personnes : **14**

Sexe féminin : 7 âges respectifs : 49 ; 36 ; 25 ; 24 ; 19 ; 13 ; 41 ans
Sexe masculin : 6; âges respectifs : 52 ; 39 ; 24 ; 22 ; 17 ; 16 ; 16 ans
Nombre d'enfants par femme : 3 (2G et 1F) ; 5 (3G et 2F).

<u>Famille</u> 20 : Nombre personnes : **10**

Sexe féminin : 4 âges respectifs : 50 ; 27 ; 19 ; 14 ans
Sexe masculin : 6 ; âges respectifs : 49 ; 29 ; 25 ; 24 ; 21 ; 17 ans
Nombre d'enfants par femme : 5 (3G et 2F)

Famille 21 : Nombre de personnes : **8**

Sexe féminin : 4 ; âges respectifs : 31 ; 21 ; 19 ; 9 ans
Sexe masculin : 4 ; âges respectifs : 52 ; 21 ; 19 ; 14
Nombre d'enfants par femme : 2 (1F et 1G)

Famille 22 : Nombre de personnes :**11**

Sexe féminin : 6 ; âges respectifs : 57 ; 34 ; 29 ; 26 ; 24 ; 16 ans
Sexe masculin : 5 ; âges respectifs : 63 ; 37 ; 31 ; 19 ; 21 ans
Nombre d'enfants par femme : 6 (3H et 3G).

Famille 23 : Nombre de personnes : **13**

Sexe féminin : 7 ; âges respectifs : 77 ; 41 ; 16 ; 10 ; 3 ; 10 ; 33 ; 18 ans
Sexe masculin : 6 ; âges respectifs : 47 ; 12 ; 8 ; 27 ; 29 ; 16 ans
Nombre d'enfants par femme : 5 (3F et 2G).

Famille 24 : Nombre de personnes : **9**

Sexe féminin : 5 ; âges respectifs : 74 ; 76 ; 43 ; 12 ; 8 ans
Sexe masculin : 4 ; âges respectifs : 48 ; 18 ; 13 ; 5 ans
Nombre d'enfants par femme : 5 (3F et 2G).

Famille 25 : Nombre de personnes : **7**

Sexe féminin : 4 ; âges respectifs : 44 ; 13 ; 11 ; 9 ans
Sexe masculin : 3 ; âges respectifs : 46 ; 17 ; 7 ans
Nombre d'enfants par femme : 5 (3F et 2G).

Famille 26 : Nombre de personnes : **10**

Sexe féminin : 6 ; âges respectifs : 42 ; 18 ; 19 ; 14 ; 10 ; 2 ans
Sexe masculin : 4 ; âges respectifs : 49 ; 16 ;12 ; 10 ans
Nombre d'enfants par femme : 8 (5F et 3G).

Famille 27 : Nombre de personnes : **15**

Sexe féminin : 7 ; âges respectifs : 41 ; 41 ; 39 ; 35 ; 26 ; 13 ans
Sexe masculin : 8 ; âges respectifs : 43 ; 34 ; 33 ; 29 ; 32 ; 24 ; 21 ; 14 ans
Nombre d'enfants par femme : 4 (2F et 2G).

Questions

1-/ Nommer l'ensemble sur lequel a porté l'enquête ? Que représente une famille pour cet ensemble ?

2-/ Quelles sont les propriétés étudiées ? Préciser celles qui sont mesurables ?

3-/ On s'intéresse au nombre de personnes par sexe. Quel est le nombre de personnes par sexe ? Déterminer le pourcentage par sexe.

A- Vocabulaire

A-a. Population : L'ensemble sur lequel porte une étude de statistique est appelé population. Ici la population est l'ensemble des familles des élèves du lycée technique.

A-b. Echantillon : Toute partie représentative de la population est appelée échantillon.

A-c. Individu : Tout élément de la population est appelé individu. Chaque famille est un individu

A-d. Caractère : L'étude statistique d'une population concerne un aspect ; une propriété de la population appelée caractère. Le caractère est le nombre de personnes.

Un caractère peut être quantitatif ou qualitatif. Lorsque le caractère étudié représente une grandeur mesurable (taille, poids, revenus…) il est dit quantitatif, et qualitatif dans le cas contraire (sexe, nationalité, race, profession…)

Un caractère *quantitatif* peut être discret ou continu. Il est dit *discret* s'il prend des valeurs isolées (nombre d'enfants, nombre d'épouses, etc..)

Il est dit *continu* s'il peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle donné (taille, poids…)

A-e. Modalité : Toute valeur du caractère étudié est appelée modalité.

A-f. Effectif, Fréquence : On appelle effectif ($\mathbf{N_i}$) ou fréquence absolue d'une modalité le nombre d'individus correspondants à celle- ci.

On appelle Effectif total $\mathbf{N = \sum Ni}$

On appelle fréquence ($\mathbf{F_i}$) relative ou tout simplement fréquence d'une modalité le rapport de l'effectif de cette modalité par l'effectif total.

B- Différentes étapes d'une étude Statistique

Toute étude statistique comporte trois parties principales : Collecte, Traitement et Interprétation.

B-a. Collecte : Elle consiste à recueillir des informations auprès des individus à partir d'un recensement ou d'une enquête.

B-a.1. Recensement : Dans le recensement, tous les éléments de la population sont étudiés sans omission ni double emploi.

B-a.2. Enquête : L'enquête porte sur un échantillon

B-b. Traitement : Le traitement est une opération qui consiste à faire le dépouillement des données et à les présenter sous forme de tableaux ou de graphiques.

B-b.1. Dépouillement : C'est l'ensemble des opérations qui s'échelonnent entre la collecte des données et la présentation des résultats. II consiste à compter les unités statistiques et les classer. Pour ce faire, on utilise les figures suivantes :

Activité : On s'intéresse à la répartition des élèves d'une classe de seconde T.E. selon le lieu d'obtention du D.E.F. (équivalent du B.E.P.C). *Il est demandé à chaque élève de :*

1-/ remplir le tableau suivant en marquant d'une croix la case correspondante à la région d'obtention de son diplôme

Bamako	*Kayes*	*Koulikoro*	*Sikasso*	*Ségou*	*Mopti*	*Tombouctou*	*Gao*	*Kidal*

2-/ remplir le tableau suivant

Régions	Bamako	Kayes	Koulikoro	Sikasso	Ségou	Mopti	Tombouctou	Gao	Kidal
Nombre d'élèves									

B-b.2. Présentation des résultats

a-/ Présentation tabulaire : Les résultats sont présentés sous forme de tableaux statistiques à simple, double, triple entrée etc.…

▪ Tableau à simple entrée : C'est une présentation des résultats suivants les modalités d'un seul caractère. Ces résultats sont appelés série de répartition ou série de distribution.

Exemple :

Sexe	Effectifs
Féminin	5
Masculin	66
Total	**71**

▪ Tableau à double entrée : C'est une présentation des résultats selon deux caractères croisés.

Exemple :

État matrimonial \ Sexe	Masculin	Féminin	Effectif total
Mariés	45	20	65
Célibataire	3	7	10
Veufs	1	1	2
Divorcés	1	2	3
Effectif Total	50	30	**80**

Application : Compléter le tableau suivant à l'aide de l'exemple de collecte de l'*activité introductive* :

*Répartition par sexe des membres des 27 familles (**F** : féminin ; **M** : masculin)*

Sexe	F	M	Total
Nombre de personnes			

Dresser le tableau de la répartition par âge de la population.

De même, dresser le tableau de la répartition par âge des membres des 27 familles. A partir de ce tableau, calculer la fréquence de la modalité 15.

À l'aide de l'activité introductive, compléter le tableau à double entrée suivant :

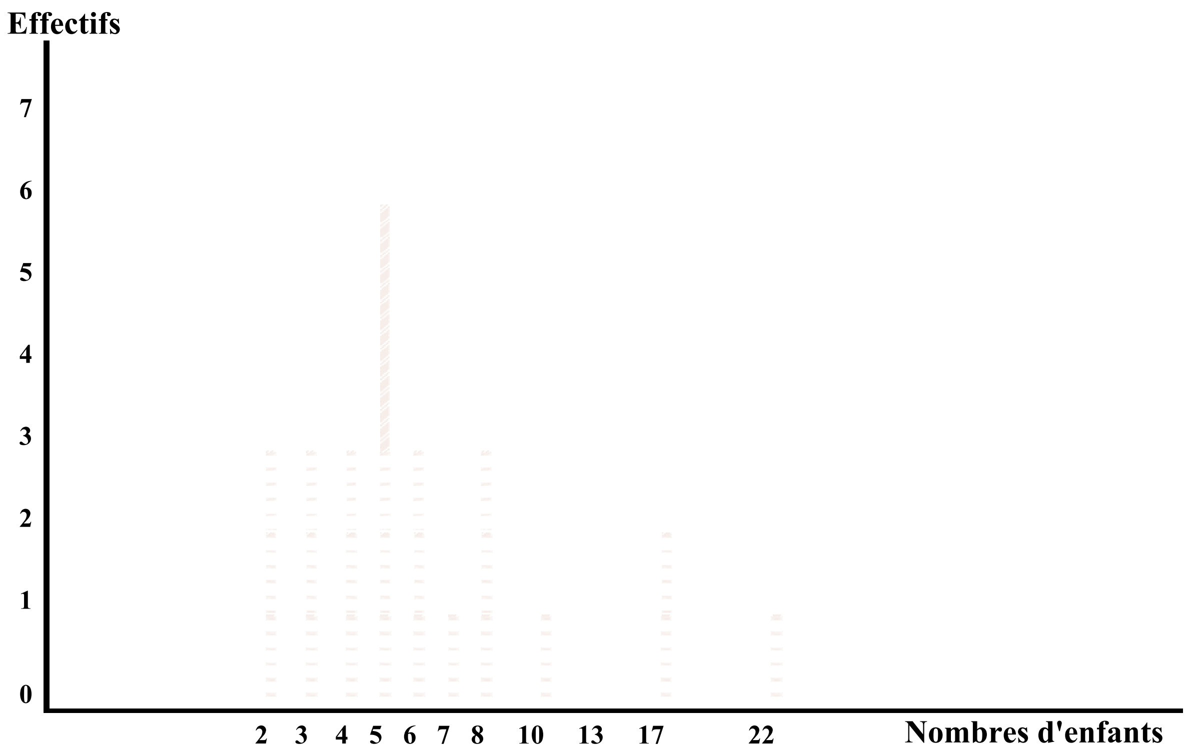
Sexe / Classes d'âge	M	F	Effectifs
[0,10[			
[10, 20[			
Effectif Total			
			Effectif global

b-/ Représentations graphiques : Il existe différents types de représentations graphiques qui sont fonctions du caractère étudié : diagramme en bâtons, histogrammes, la pyramide des âges ; les polygones des effectifs cumulés ; représentation par secteur etc.

▪ Diagramme en bâtons : Il est généralement utilisé pour un caractère discret.

Exemple : La répartition des familles selon le nombre d'enfants

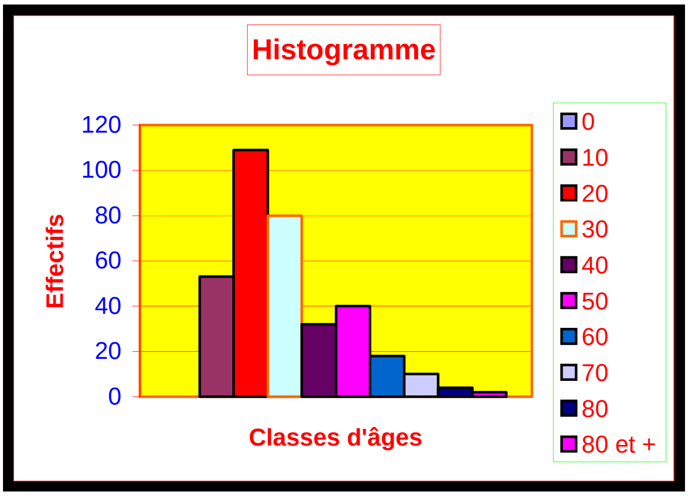
Nombre d'enfants	2	3	4	5	6	7	8	10	13	17	22	**Total**
Nombre de familles	3	3	3	6	3	1	3	1	1	2	1	**27**



▪ <u>Histogramme</u> : Commode pour un caractère continu.

***Exemple 1* :** Répartition selon l'âge des membres des 27 familles.

Classes d'âge	Effectifs (n_i)
[0 - 10]	53
[10 - 20]	109
[20 - 30]	80
[30 - 40]	32
[40 - 50]	40
[50 - 60]	18
[60 - 70]	10
[70 - 80]	4
[80 et plus	2
Effectif Total : N	**348**

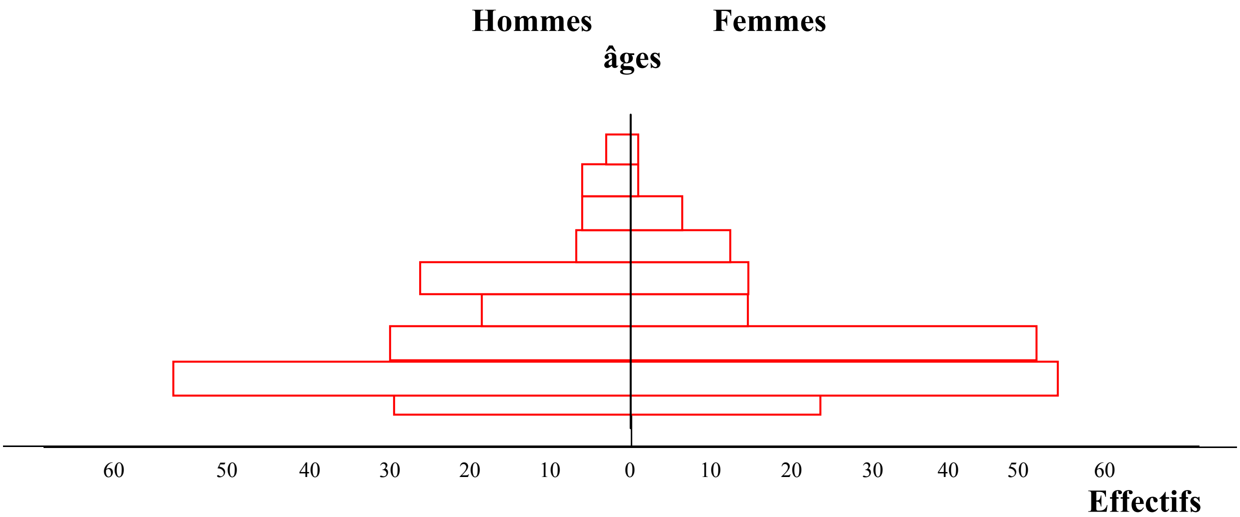


***Exemple 2* :** Répartition des membres des 27 familles selon l'âge et le sexe

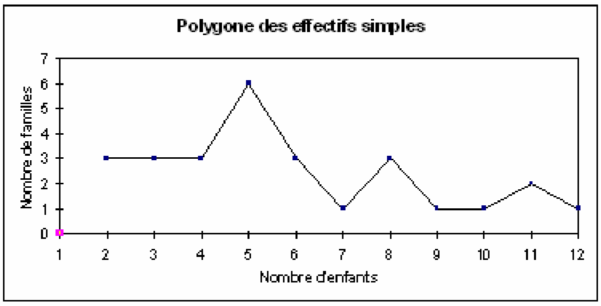
– <u>La pyramide</u>

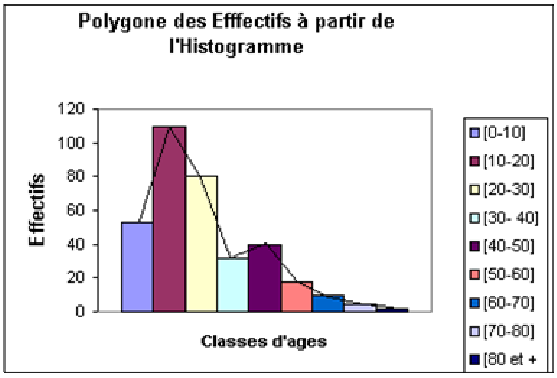
Classe d'âges	Féminin	Masculin
[0 - 10]	28	25
[10 - 20]	56	53
[20 - 30]	29	51
[30 - 40]	17	15
[40 - 50]	25	15
[50 - 60]	5	13
[60 - 70]	3	7
[70 - 80]	3	1
80 et plus	1	1
Total	**167**	**181**

PYRAMIDE DES ÂGES



– <u>Le polygone des effectifs simples</u> : On l'obtient en joignant les sommets des bâtons pour les caractères discrets et les milieux des bandes pour les caractères continus.



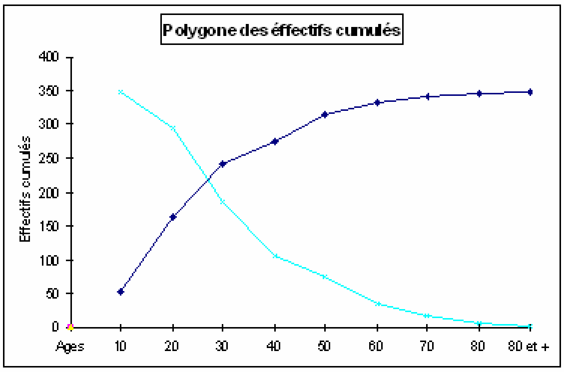


– <u>Le polygone des effectifs cumulés</u>

Définition : *Les valeurs du caractère étant données par ordre croissant ; on appelle effectifs cumulés croissants d'une valeur x_i du caractère, le nombre d'individus pour lequel la valeur prise par le caractère est inférieure ou égale à x_i.*

On définit de façon analogue les fréquences cumulées décroissantes. Dans les mêmes conditions, on appelle effectif cumulé décroissant d'une valeur x_i du caractère, le nombre d'individus pour lequel la valeur prise par le caractère est supérieure ou égale à x_i.

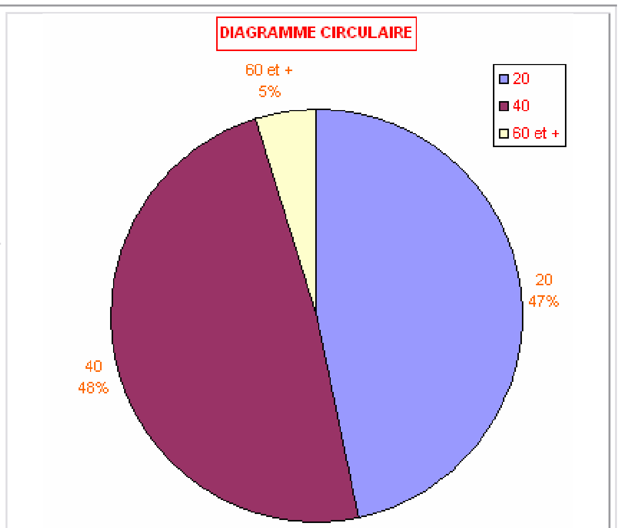
On définit de façon analogue les fréquences cumulées décroissantes.



– <u>Représentation sectorielle</u>

Diagramme circulaire : Répartition des membres des 27 familles par groupes d'âges

Classes	Effectifs	Effectifs en degrés
[0 ;20]	162	167°
[20 ; 60]	170	175°
[60 ;→[	16	18°
Total	348	360°



Remarque : On peut aussi faire un diagramme semi- circulaire comme la répartition sur un demi-cercle.

B-c. Interprétation des résultats : Pour comparer des séries de même nature nous utilisons les caractéristiques de position et de dispersion.

B-c.1. Caractéristiques de position (ou de valeur centrale) : Il s'agit de caractériser chaque série par des nombres précisant la position de certaines valeurs du caractère par rapport à l'ensemble des valeurs.

Les caractéristiques de position sont : la moyenne arithmétique, la médiane et le mode.

a-/ La moyenne arithmétique : Soient n nombres réels x_1, $x_2 \ldots x_n$. On nomme moyenne arithmétique de ces nombres le nombre réel $\bar{x}$ (lire « x barre ») défini par : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum xi$ moyenne arithmétique simple.

Exemple 1 : Un élève de la 2e T.E a obtenu les notes suivantes $x_1 = 08$;

$x_2 = 12$; $x_3 = 13$; $x_4 = 07$; $x_5 = 15$

$$\bar{x} = \frac{08+12+13+07+15}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

Dans le cas ou chaque valeur x_i du caractère est affectée d'un coefficient n_i (fréquence absolue), on a : $\boxed{\bar{x} = \frac{\sum x_i n_i}{n}}$

Appelé moyenne arithmétique pondérée (n_i est encore appelé coefficient de pondération ou poids)

Exemple 2 : Soit, la série statistique définie par le tableau suivant :

Nombre d'enfants n_i	2	3	4	5	6	7	8	10	13	17	22	**Total**
Nombre de familles n_i	3	3	3	6	3	1	3	1	1	2	1	**27**

Le nombre moyen d'enfants est :

$$\bar{x} = \frac{2\times3+3\times3+4\times3+5\times6+6\times3+7\times1+8\times3+10\times1+13\times1+17\times2+22\times1}{27} = \frac{185}{27}$$

$$= 6{,}85 \approx 7$$

Chaque famille a en moyenne 7 enfants.

b-/ Le mode : C'est la valeur du caractère ayant le plus grand effectif. Dans le cas des variables continues, on a la **classe modale**, mais on doit faire attention aux amplitudes de classe. Si les amplitudes sont inégales on prend comme classe modale la classe qui a la fréquence rectifiée la plus élevée.

Exemple : le stock de chaussures d'un commerçant comporte les pointures suivantes :

20 – 21 – 35 – 33 – 40 – 41 – 42 – 43 – 42 – 40 – 42 – 26 – 43 – 42 – 42

Déterminer la pointure la plus vendue.

Solution

Pointure	20	21	26	33	35	40	41	42	43	**Total**
Nbre de chaussures	1	1	1	1	1	2	1	5	2	**15**

Le mode de cette distribution statistique est $\boxed{Mo = 42}$

c-/ La médiane : La médiane est la valeur du caractère qui correspond à l'unité statistique située au milieu de la population rangée suivant la valeur du caractère.

1^er^ Cas : Si n est impaire $\Rightarrow$ n = 2p + 1

Si la population est rangée de $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a : $Me = x_p + 1$

Exemple : 58 – 63 – 60 – 48 – 58

En les rangeant dans l'ordre (48-58-58-60-63), on obtient la médiane $\boxed{Me = 58}$

2^e^ Cas : Si n est pair n = 2p, on a alors un intervalle médian $[x_p ; x_{p+1}]$

Exemple : 48 – 58 – 60 – 70 – 105 – 47

En les rangeant dans l'ordre (47-48-58-6 -70-105), on obtient l'intervalle médian [58 ; 60]

Remarque : Pour les séries continues la médiane est déterminée par interpolation linéaire.

B-c.2. Autres caractéristiques de position : les quantiles

On appelle quantile d'ordre $\frac{b}{v}$ la valeur du caractère qui laisse une proportion $\frac{b}{v}$ des individus de valeur inférieure et $\frac{b}{v}$ des individus de valeur supérieure ($0 < \frac{b}{v} < 1$).

On distingue :

a-/ Les quartiles : Ce sont les valeurs d'un caractère qui partagent l'effectif total d'une série en quatre groupes égaux, les valeurs étant classées par ordre croissant. Il y a trois quartiles notés de 1 à 3 ($Q_{1/4}$, $Q_{2/4}$ et $Q_{3/4}$).

b-/ Les déciles : Ce sont des valeurs d'un caractère qui partagent l'effectif total d'une série en 10 groupes égaux, les valeurs étant classées par ordre croissant. Il y a neuf déciles notés de 1 à 9 (D_1, D_2.. D_{10}).

c-/ Les centiles : Ce sont des valeurs d'un caractère qui partagent l'effectif total d'une série en 100 groupes égaux.

d-/ Méthode de calcul des quantiles : On utilise le même procédé que pour la médiane.

Exemple : Cas d'une variable continue.

Poids	ni (Effectifs)	$\sum n_i$ (Effectif cumulé)
[45 – 50]	3	3
[50 – 55]	7	10
[55 – 60]	6	16
[60 – 65]	15	31
[65 – 70]	8	39
[70 – 80]	7	46
[80 – 90]	4	50
Total	**50**	**100**

– Calcul des quantiles :

- Pour le calcul du 1er quantile, Q_1 on cumule les effectifs jusqu'à dépasser pour la première fois la valeur $\frac{n}{4} \Rightarrow \mathbf{Q_1} = 55 + 5\times\frac{12,5-10}{16-10} = 57,08$
- Pour le calcul du 2^{e} quantile, Q_2 on cumule les effectifs jusqu'à dépasser pour la première fois la valeur $\frac{2n}{4} \Rightarrow \mathbf{Q_2} = 60 + 5\times\frac{25-16}{31-16} = 63$
- Pour le 3^{e} quartile, on cumule les effectifs jusqu'à dépasser pour la première fois la valeur $\frac{3n}{4} \Rightarrow \mathbf{Q_3} = 65 + 5\times\frac{37,5-31}{39-31} = 69,06$

– Calcul des déciles :

- 1er décile : $\mathbf{D_1} = 50 + 5\times\frac{5-3}{10-3} = 51,43$
- 2^{e} décile : $\mathbf{D_2} = 55$
- 3^{e} décile : $\mathbf{D_3} = 55 + 5\times\frac{15-10}{16-10} = 59,16$
- 4^{e} décile : $\mathbf{D_4} = 60 + 5\times\frac{20-16}{31-16} = 61,33$
- 5^{e} décile : $\mathbf{D_5} = 60 + 5\times\frac{25-16}{31-16} = 63$
- 6^{e} décile : $\mathbf{D_6} = 60 + 5\times\frac{30-16}{31-16} = 64,66$
- 7^{e} décile : $\mathbf{D_7} = 65 + 5\times\frac{35-31}{39-31} = 67,5$
- 8^{e} décile : $\mathbf{D_8} = 70 + 10\times\frac{40-39}{46-39} = 71,43$
- 9^{e} décile : $\mathbf{D_9} = 70 + 10\times\frac{45-39}{46-39} = 78,57$

Remarques :

- Les déciles sont généralement utilisés en économie pour l'étude de la disparité des revenus.
- Les centiles et les quartiles n'étant pas étudiés en classe de seconde, ne feront pas l'objet d'une attention particulière.

B-c.3. Caractéristiques de dispersion

Les principales sont :

– L'étendue utilisée en contrôle de fabrication

– L'écart moyen par rapport à une mesure de tendance centrale (moyenne, médiane)

– L'écart type ou écart quadratique moyen

– La variance qui est le carré de l'écart type

– Le coefficient de variation qui est le rapport entre l'écart type et la moyenne arithmétique.

Ces caractéristiques ne sont utilisées en classe de seconde et par conséquent ne feront pas l'objet d'une étude particulière.

Série d'exercices

A- Énoncés

Exercice 1

À la dernière année scolaire ; les résultats du baccalauréat d'un lycée se repartissent de la manière suivante :

Séries \ Résultats	Admis	Echecs	Totaux	Fréquence de la série (en %)
LL	**k**	28	94	**z**
SH	66	22	**x**	28
SE	**a**	**b**	**y**	18
SB	52	24	**c**	**s**
Totaux	**t2**	91	315	103
Fréquence des résultats en %	71	29	100	

1-/ Compléter le tableau ci-dessus puis déterminer les taux de réussite et de d'échec.

2-/ Interpréter les résultats.

Exercice 2

Soit une entreprise de 750 salariés. La distribution des salaires est consignée dans le tableau ci-dessous :

Classes de salaires	Effectifs	N_i C_i	$n_i \uparrow$ croissant	$n_i \downarrow$ décroissant
[5.000-7.000]	75	450.000	75	750
[7.000-8.000]	90	675.000	165	675
[8.000-9.000]	100	850.000	265	585
[9.000-10.000]	110	1.045.000	375	485
[10.000-12.000]	120	1.320.000	495	375
[12.000-15.000]	100	1.350.000	595	255
[15.000-20.000]	801	1.400.000	675	155
[20.000-30.000]	75	1.875.000	750	75
Total	**750**	**8.965.000**		

1-/ Construire l'histogramme de la série

2-/ Calculer le salaire moyen

3-/ Trouver le salaire médian par le calcul et par la représentation graphique

4-/ Calculer l'éventail des salaires

5-/ Ce chiffre est-il suffisant pour représenter la distribution effective des salaires ? Dites pourquoi ?

6-/ Mesurer les inégalités des salaires par la méthode :

a-/ des déciles

b-/ des quartiles

c-/ de concentration (**courbe de Lorentz**)

d-/ calculer le mode de la série.

Exercice 3

Dix ans après avoir quitté l'école, d'anciens camarades se retrouvent pour échanger des souvenirs et savoir ce qu'ils sont devenus. Au début de la soirée cinq d'entrée eux sont présents et ils comparent leurs revenus mensuels.

Ami	Oumar	Fanta	Karim	Assa
6.000	7.000	8.000	9.000	10.000

Calculer :

– la moyenne

– la médiane

Un peu plus tard Sidy, le célèbre animateur de la télévision, arrive. On raconte qu'il gagne 100.000 F CFA par mois :

1-/ Que devient alors la moyenne – la médiane ?

2-/ Comment expliquer ces résultats ?

3-/ Quelle est la différence entre la moyenne et la médiane ?

4-/ Lequel de ces deux indicateurs est préférable ?

Exercice 4

À la dernière session du baccalauréat, les résultats pour les séries classiques d'un lycée se repartissent de la manière suivante :

Résultats / Série	Reçus	Refusés	Totaux	Fréquence
A		28	94	
B		22		28
C				18
D	52			
Totaux			315	100
Fréquence en %	71		100	

1-/ Chacun des résultats sera soigneusement justifié

a-/ Compléter la ligne des résultats de la série A

b-/ Déterminer le nombre total de candidats dans chaque série

c-/ Achever de remplir le tableau.

d-/ Quel est le pourcentage de reçus parmi les candidats ?

2-/ Parmi les candidats reçus, quel est le pourcentage de deux qui proviennent de la série A ?

Exercice 5

Le sang humain est classé en quatre groupes distincts A, B, AB et O.

Indépendamment du groupe, le sang peut possède le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de Rhésus négatif (Rh-).

Dans la population française, les groupes sanguins se repartissent d'après le tableau suivant (en %)

	A	O	B	AB
Rh+	36,96		8	3,25
Rh-	7,14	6,88	1,55	0,62

Un individu ayant du sang du groupe O et de Rhésus négatif est un donneur universel, car son sang peut être reçu par une personne de n'importe quel groupe et Rhésus.

1-/ Quel est le pourcentage de donneurs universels ?

2-/ Calculer la proportion de personnes possédant le facteur Rhésus négatif chacun.

3-/ Calculer la proportion de personnes possédant le facteur Rhésus positif.

a-/ Chez les couples ou l'homme est de Rh+ et la femme de Rh-, il se produit, dans huit (8) cas des naissances, des accidents qui nécessitent un traitement spécial se du nouveau-né.

b-/ Calculer la proportion de couples où l'homme est de Rh+ et la femme de Rh-. On admettra que le facteur Rhésus n'influe pas sur la formation des couples.

c-/ Calculer la proportion de naissances où le nouveau né doit subir le traitement évoqué plus haut.

Exercice 6

Soit une entreprise de 750 salariés, la distribution des salaires est dans le tableau ci-dessous

Classes des salaires	Effectifs
5000-7000	75
7000-8000	90
8000-9000	100
9000-10000	110
10000-12000	120
12000-15000	100
15000-20000	80
20000-30000	75
Total	**750**

1-/ Représenter graphiquement ces données.

2-/ Calculer le salaire moyen.

3-/ Trouve le salaire médian, par le calcul et par la représentation graphique.

4-/ Calculer l'éventail des salaires.

5-/ Ce chiffre est-il suffisant pour représenter la distribution effective des salaires ?

Dire pourquoi.

6-/ Calculer le rapport inter décile, et le rapport inter quartile.

Exercice 7

Soit la répartition des salariés en fonction de leur revenu annuel.

Tranche de revenus	Effectifs de salariés
100 000 – 2 00 000	150 000
200 000 – 4 00 000	250 000
400 000- 800 000	350 000
800 000 – 850 000	80 000
850 000 – 1 000 000	120 000
1 000 000 – 2 000 000	50 000

1-/ Représenter graphiquement cette série statistique par :

a-/ un histogramme.

b-/ des polygones des effectifs croissants et décroissants et déterminer la médiane.

2-/ Calculer le revenu annuel moyen de l'ensemble des salariés.

3-/ Mesurer les inégalités de revenus par la méthode :

a-/ des déciles

b-/ des quartiles

c-/ de concentrations (**courbe de Lorentz**)

4-/ Calculer la médiane et le mode de la série.

Exercice 8

Un commerçant a un budget mensuel qu'il utilise de la façon suivante : 20% du budget sont consacrés au loyer. La moitié du montant du loyer sert à payer l'électricité et le téléphone. Le montant du loyer représente 80% des frais de nourriture.

Les crédits qu'il doit rembourser représentent 30% des frais de nourriture et il épargne autant qu'il dépense en crédit.

Ses frais vestimentaires représentent les ¾ de son épargne. Le reste est consacré aux frais professionnels.

1-/ Construire un diagramme circulaire représentant les dépenses du commerçant.

2-/ Sachant que son budget est de 20 000 fcfa, calculer la part consacrée à chaque poste .

Exercice 9

Voici les notes de Bandiougou pendant l'année scolaire 2001-2002

1er trimestre : 10 ; 7 ; 14

2^{e} trimestre : 12 ; 9 ; 7

3^{e} trimestre : 10 ; 11 ; 13 ;12 ; 15 ; 16

1-/ Calculer les moyennes, $\overline{X}_2$ et $\overline{X}_3$ lors des trois trimestres.

2-/ Calculer la moyenne annuelle de Bandiougou (la moyenne de ses notes de l'année)

3-/ Pour calculer la moyenne, le professeur calcule la moyenne des trois moyennes trimestrielles. Bandiougou n'est pas content. Qu'en pensez-vous ?

4-/ Quels coefficients c_1 c_2 et c_3 faut-il affecter à chaque note du trimestre pour que la moyenne annuelle soit la moyenne pondérée des moyennes, $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$ affectés de leurs coefficients ? .

Exercice 10

Pour $i \in [1 ; 9]$ on donne $n_i = 2i$ et $x_i = 3(i-1)$

a-/ Étant donné *n* observations, des valeurs x_i et de moyenne $\overline{x}$; calculer :

$$\sum_{i=1}^{9} n_i \; ; \; \sum_{i=1}^{9} x_i \; ; \sum_{i=1}^{9} n_i x_i$$

b-/ Calculer $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})$

Exercice 11

1-/ Construire le digramme en bâtons de la série suivante :

Valeurs x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectifs	7	15	28	40	35	25	13	13	2

2-/ Calculer la moyenne $\overline{x}$ de cette série.
3-/ Construire l'histogramme et déterminer la moyenne de la série suivante

Classe	[0 ; 10]	[10 ; 20]	[20 ; 30]	[30 ; 40]
Effectif	4	6	8	1

Exercice 12

Les salaires mensuels de **650** personnes d'un département se repartissent suivant le tableau statistique :

Salaire (F_i)	**Effectifs (x_i)**
3 000 à 4 000	20
4 000 à 5 000	80
5 000 à 8 000	158
8 000 à 10 000	240
10 000 à 12 000	120
12 000 à 15 000	32

1-/ Construire l'histogramme des effectifs et le polygone statistique des effectifs.

2-/ Déterminer les effectifs cumulés croissants et construire le polygone statistique des effectifs cumulés croissants.

3-/ Calculer la moyenne, la variance et l'écart type.

Exercice 13

Le tableau suivant donne la répartition de la population active d'une région A par tranche d'âges de 5 ans en 1992. Pour les calculs " 65 au plus " sera remplacé par la classe [65 ;70[

Age	Population active agricole	Population active non agricole
15 à 19 ans	508	9820
20 à 24 ans	1384	78206
25 à 29 ans	1596	31288
30 à 39 ans	1700	24208
40 à 44 ans	1572	17340
45 à 49 ans	2084	18652
50 à 54 ans	4068	17684
55 à 59 ans	4900	13184
60 à 64 ans	2428	4732
65 ou plus	720	1212

1-/

a-/ Dresser le tableau des effectifs cumulés de la population active agricole ; puis l'histogramme ainsi que le polygone des effectifs.

b-/ Déterminer la médiane de cette série, ainsi que la moyenne arithmétique

c-/ Déterminer l'écart interquartile de cette série.

2-/

a-/ À l'aide du tableau ci-dessous ; déterminer la répartition de la population active de cette région (agricole et non agricole) par tranche de 5 ans.

b-/ Répondre aux mêmes questions qu'à la question **1-/**.

Exercice 14

Les tableaux ci-dessous donnent pour deux entreprises A et B les répartitions respectives des salariés suivant leurs salaires mensuels exprimés.

Entreprise A		Entreprise B	
Salaires	**Effectifs**	**Salaires**	**Effectifs**
1500	500	4000	500
2500	400	6000	450
22000	50	8000	30
32000	50	10000	20

Pour chaque entreprise répondez aux questions suivantes :

1-/ Déterminer l'effectif total et la fréquence de chaque salaire.

2-/ Déterminer la masse salariale totale et la salaire moyen.

3-/ Construisez le diagramme en bâtons des fréquences.

4-/ Déterminer les fréquences cumulées, construisez la courbe des fréquences cumulées et calculer le salaire médian.

À votre avis dans quelle entreprise les inégalités de salaires sont-elles les plus importantes ?

B- Quelques ndications de solution

Exercice 1

1-/ Calcul des valeurs manquantes

$$\frac{x \times 100}{315} = 28 \Rightarrow x = \frac{28 \times 315}{100} = 88{,}2 \approx 88$$

$$z = \frac{94 \times 100}{315} = 29{,}84 \approx 30$$

$$\frac{t2 \times 100}{315} = 71 \Rightarrow t2 = \frac{71 \times 315}{100} = 223{,}65 \approx 224$$

$k = 94\text{-}28 = 66$

$$\frac{y \times 100}{315} = 18 \Rightarrow y = \frac{18 \times 315}{100} = 56{,}7 \approx 57$$

$s = 100\text{-}(30+28+18) = 24$

$$\frac{a}{71} \times 100 = 57 \Rightarrow a = \frac{71 \times 57}{100} 40{,}47 \approx 40$$

$b = 57\text{-}40 = 17$

Taux de réussite et d'échec par série

***Pour la série S.H.* :**

Taux de réussite : $\frac{66 \times 100}{88} = 75$; Taux d'échec : $\frac{22 \times 100}{88} = 25$

Série	Taux de réussite	Taux d'échec
L.L	70%	30%
S.H	75%	25%
S.E	70%	30%
S.B	68%	32%

2-/ Les résultats sont bons dans l'ensemble, le taux de réussite dépasse la moyenne. La série **S.H** a le taux de réussite le plus élevé contrairement à la série S.B. qui a le taux de réussite le plus bas.

***Remarques* :** L'interprétation présente des insuffisances, entre autres :

- Au plan global, nous ne disposons d'aucune information sur le résultat national,
- d'ou difficultés de situer cet établissement par rapport aux autres ;
- Au niveau des séries nous ne disposons pas des résultats antérieurs permettant
- d'apprécier les marges de progression.
- Manque d'analyse didactique des sujets d'examens.

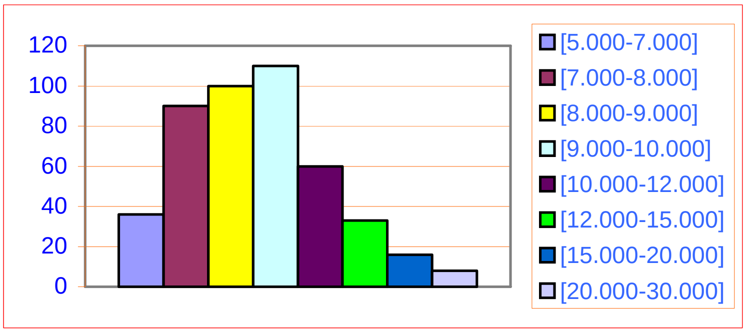
Exercice 2

1-/ Remarquons que l'amplitude la plus fréquente est 1.000.

Prenons 1.000 comme amplitude de référence notée : a_r

Effectif corrigé est : Ec = $\frac{n_i}{a_i} \times a_r$ (a_i : amplitude donnée)

Classes des salaires	Effectifs corrigés (Ec = $\frac{ni \times ar}{ai}$)
[5.000-7.000]	36
[7.000-8.000]	90
[8.000-9.000]	100
[9.000-10.000]	110
[10.000-12.000]	60
[12.000-15.000]	33
[15.000-20.000]	16
[20.000-30.000]	8



2-/ Salaire moyen : $\bar{x} = \frac{\sum n_i C_i}{n}$

Pour le calcul des n_iC_i : voir Tableau dans l'énoncé.

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i C_i}{\sum n_i} = \frac{8.965.00}{750} = 11.953,33$$

3-/ Salaire médian par calcul

$$\text{Me} = \frac{a_{i+1} - a_i}{n_i} \times \left(\frac{n}{2} - n_{i-1}\right) + a_i$$

$[a_{i-1}, a_i] \rightarrow n_{i-1}$

$[a_i, a_{i+1}] \rightarrow \frac{n}{2}$

Soit $[a_i, b_i]$ la classe contenant la $(\frac{n}{2})^{\text{ème}}$ valeur du caractère et α l'effectif cumulé croissant correspondant à $[a_{i-1}, b_{i-1}]$

$$\textbf{Me'} = ai + \frac{b_i - a_i}{n_i} \times \left(\frac{n}{2} - \alpha\right)$$

$$\textbf{Me'} = 9.000 + \frac{10.000 - 9.000}{110} \times 110 = 10.000$$

Détermination graphique de la médiane :

La médiane est l'abscisse du point d'intersection des polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.

4-/ Soit **e** l'éventail des salaires **e** = 30.0000 – 5.000 = 25.000

5-/ Ce chiffre est suffisant pour exprimer la distribution effective des salaires car il ne nous dit pas comment les salaires sont repartis entre les valeurs extrêmes.

Plus généralement l'étendue perd toute signification (quant à la distribution effective des observations) lorsque sa valeur est trop élevée. C'est la raison pour laquelle on lui préfère d'autres paramètres de dispersion.

6-/ Le rapport inter décile : $\frac{n}{2} = 75$

d_1 est la 75^{e} valeur du caractère : $\frac{7.000 - 5.000}{75} \times 75 = 2.000$

d_1= 5.000 + 2.000 = 7.000

d_9 = $15.000 + \frac{20.000 - 15.000}{80} \times 80 = 20.000$

Le rapport inter décile est : **r** = $\frac{d_9}{d_1} = \frac{20.000}{7.000} = \frac{20}{7} \approx 2,86$

Le rapport interquartile $\frac{n}{4} = \frac{750}{4} = 187,5$

$$\begin{array}{ccccc} 8.000 & < & Q1 & < & 9.000 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 165 & < & 187,5 & < & 265 \end{array}$$

$$\frac{9.000 - 8.000}{265 - 165} = \frac{Q_1 - 80.000}{185,7 - 165}$$

$$10 = \frac{Q_1 - 8.000}{22,5}$$

Q_1= 8.000 + 225 = 8.225

$$\begin{array}{ccccc} 12.000 & < & Q_3 & < & 5.000 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 495 & < & 562,5 & < & 595 \end{array}$$

$$\frac{15.000 - 12.000}{595 - 495} = \frac{Q_3 - 12.000}{562,2 - 495} \Rightarrow 30 = \frac{Q_3 - 12.000}{67,5} \Rightarrow Q_3 = 12.000 + 30 \times 67,5 = 14.025$$

$$\mathbf{r} = \frac{Q_3}{Q_1} = \frac{14.025}{8225} = 1,7$$

Exercice 3

– Soit **Mr** la moyenne de leurs revenus

$$\mathbf{Mr} = \frac{6.000 + 7.000 + 8.000 + 9.000 + 10.000}{5} = 8.000$$

La médiane est 8.000

1-/ Soit Mr' la moyenne, Mr = $\frac{40.000 + 100.000}{6} = 23333,33$

La médiane est **Mr'**= $\frac{40.000+9.000}{2}=\frac{17.000}{2}=8.500$

2-/ Interprétation des résultats :

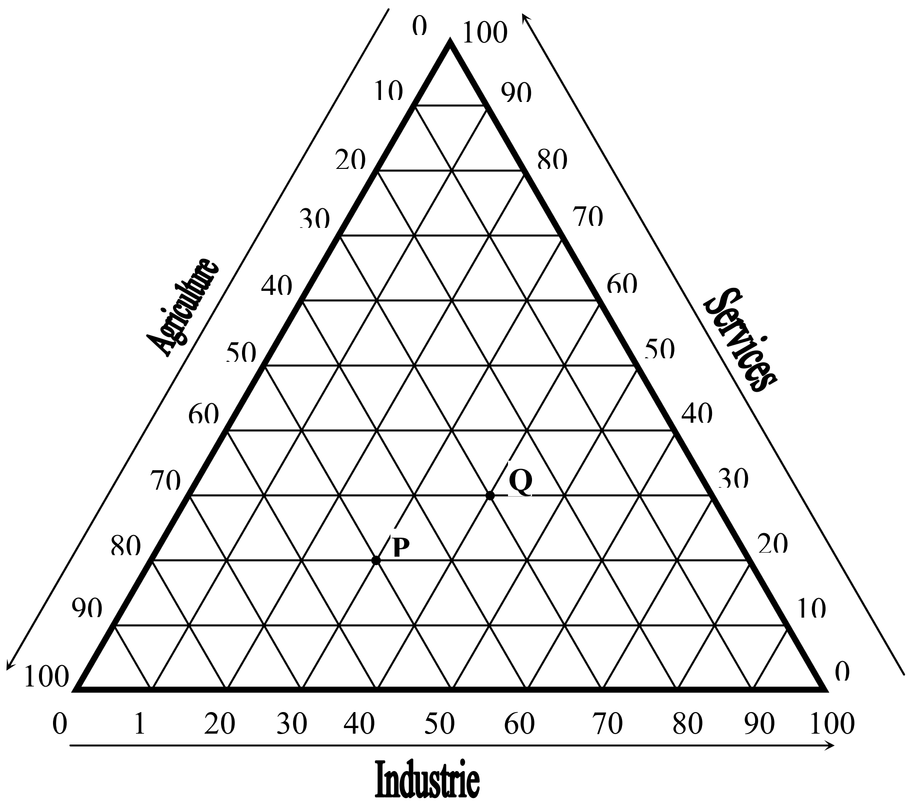
Mr' > Mr car le salaire mensuel de Sidy est supérieur à 8.000 (l'ancienne moyenne).

La médiane a augmenté car le salaire de Sidy est supérieur à l'ancienne médiane

3-/ La moyenne est plus sensible que la médiane dans ce cas.

4-/ La moyenne est préférable à la médiane à cause de sa plus grande sensibilité.

Triangle



Théorème (Admis) : Lorsque les cotés d'un triangle équilatéral sont gradués de 0 à ***a*** , et que pour tout point intérieur on se déplace parallèlement à chaque coté dans le sens des graduations croissantes, la somme des nombres plus chaque coté est égale à ***a***.

Exemple : Soient Pet Q deux points intérieurs donnés.

Au point P, on associe la somme 50+ 30 + 20 = 100

Au point Q, on associe la somme 40 + 30 + 30 = 100

Propriété : Lorsque les cotés d'un triangle équilatéral sont gradués de 0 à a, et que pour tout point intérieur on se déplace parallèlement à chaque coté dans le sens des graduations croissantes, la somme des nombres lus sur chaque coté est égale à a.

Exemple : Ajoutons les

trois nombres auxquels **Triangle**

on aboutit sur ces cotés

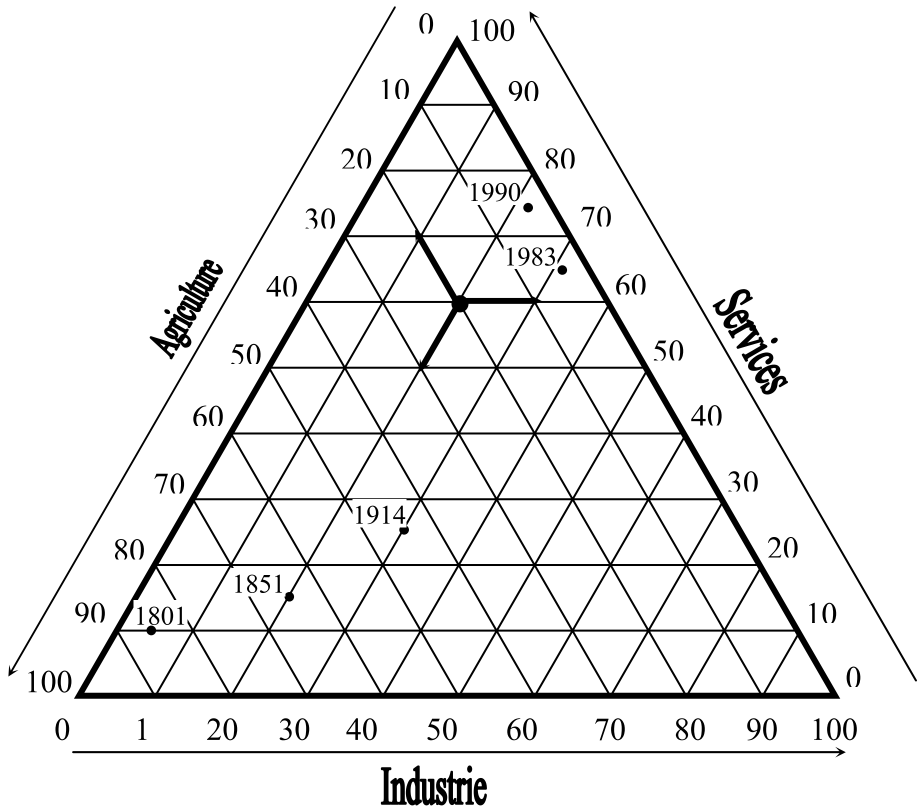
à partir du point **M** : 2+2+4 = 8

Pour chacun des deux (2) points **N et A,** calculez la somme correspondante que constatez-vous ?

Remarque : On utilise ce type de graphique pour représenter les variations de trois variables dont la somme est 100% cotés.

Application faisant usage du graphique triangulaire : Le but de cet exercice est de visualiser l'évolution de la répartition de la population active de la France de 1801 à 1990 à l'aide du graphique triangulaire ci- dessous :

Triangle



a-/ Lisez approximativement sur ce graphique, la répartition de la population active de la France en 1801 ; 1914 ; 1983 et 1990.

b-/ De 1801 à 1851, le secteur agricole est en net recul, quel secteur en profite essentiellement ?

c-/ De 1962 0 1983, on note un nouveau recul du secteur agricole – Au bénéfice de quel secteur se fait- il ?

d-/ Commenter l'évolution de la répartition entre les trois secteurs de 1801 à 1990.

Solution

a-/ Répartition de la population active de 1801

Années	Secteurs	Répartition
1801	Agriculture	85
	Industrie	05
	Service	10
1851	Agriculture	65
	Industrie	20
	Service	15
1914	Agriculture	45
	Industrie	30
	Service	25
1983	Agriculture	03
	Industrie	33
	Service	64
1990	Agriculture	6
	Industrie	27
	Service	67

b-/ D e 1801 à 18 51, l'*Industrie* passe de 5 à 20 pendant que le *Service* passe de 10 à 15. Ainsi le recul du *Secteur Agricole* profite au *Secteur Industrie* pendant cette période.

c-/

Années	Secteurs	Répartition
1962	Agriculture	20
	Industrie	40
	Service	40
1983	Agriculture	03
	Industrie	33
	Service	64

Ce nouveau recul de l'agriculture se fait au bénéfice du service.

d-/ De 1801 à 1990

- L'agriculture passe de 85 à 06
- L'industrie passe de 05 à 27
- Le service passe de 10 à 67

De façon globale on constate une forte régression du secteur des deux autres secteurs- Cependant le secteur Tertiaire (service) est en nette progression par rapport au secteur industriel.