NOTIONS DE MATHEMATIQUES

<u>Objectifs</u> : L'élève doit être capable de :

- *définir un vecteur*
- *citer les caractéristiques d'un vecteur*
- *représenter un vecteur*
- *écrire les opérations (somme, produit scalaire, produit vectoriel) sur les vecteurs*
- *citer les propriétés de l'addition vectorielle, du produit scalaire, du produit vectoriel*
- *représenter les vecteurs correspondants résultant de ces opérations et écrire les normes de ces vecteurs*
- *écrire un vecteur dans une base orthonormée*
- *écrire les formules d'addition et de transformation en trigonométrie*
- *écrire les dérivées première et seconde d'une fonction*
- *écrire la relation exprimant une progression arithmétique*
- *dire si un trièdre est direct ou non direct*

I – INTRODUCTION

Dans l'étude d'un phénomène physique, il intervient essentiellement deux activités :

1. L'activité d'expérimentation qui consiste en l'observation des faits, leur reproduction si possible dans la situation d'observation pour se convaincre de la constance des mêmes choses observées
2. L'activité de mathématisation qui consiste en l'interprétation, l'explication des faits expliqués, la déduction de lois mathématiques applicables à d'autres situations analogues à celle étudiée.

La maîtrise de l'outil mathématique devient donc indispensable dans cette phase de l'activité physique.

II – LES VECTEURS

1. Définition

Un vecteur est une « classe » de bipoints, un bipoint étant tout simplement un couple de points.

On peut encore définir le vecteur comme un segment de droite orienté.

2. Notation

Lorsqu'un couple de points (A, B) appartient à une classe qui définit un vecteur, ce dernier noté $\overrightarrow{AB}$ et on lit « vecteur AB ». A est l'**origine** (on préfère en physique l'expression **point d'application** du vecteur) et B son extrémité. On peut aussi écrire $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

3. Caractéristiques d'un vecteur

Tout vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

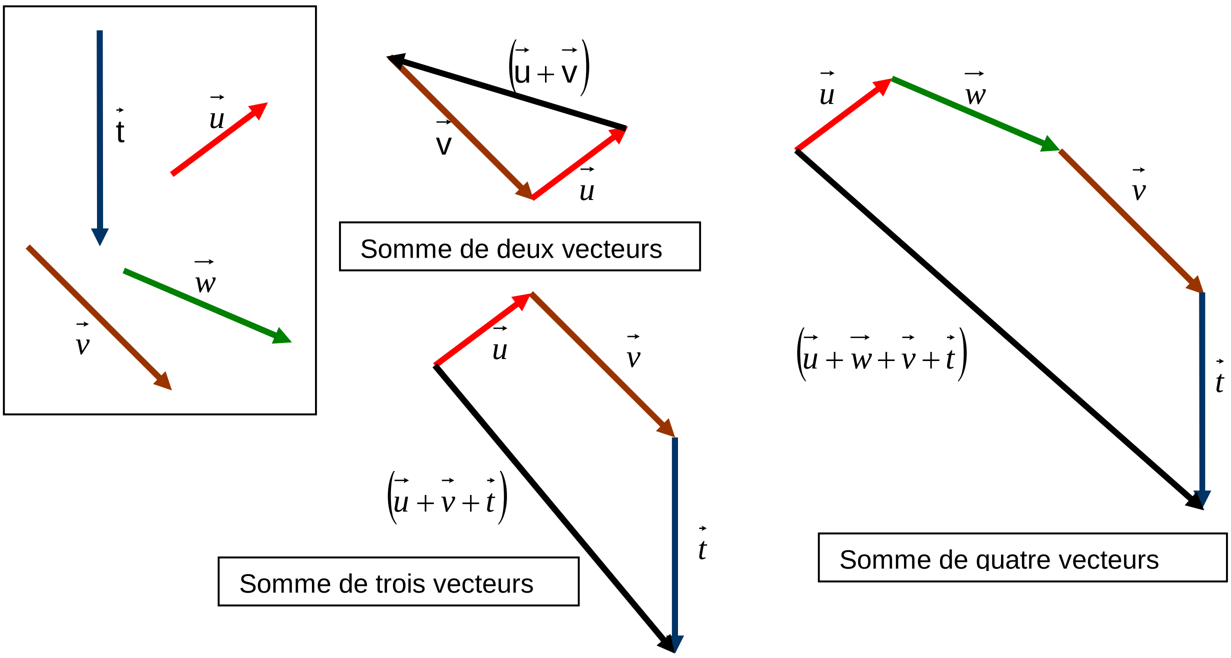
- son origine ou point d'application (le point A)
- sa direction, ou son support ou encore sa ligne d'action qui est la direction de la droite AB qui supporte le vecteur
- son sens (symbolisé par une flèche à l'extrémité B du vecteur)
- son module ou sa norme ou encore son intensité notée u = AB = $\|\vec{u}\|$.

4. Opérations sur les vecteurs ; propriétés

4.1 Somme de vecteurs (symbole +)

L'addition vectorielle est l'opération qui, à tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ ***fait correspondre le vecteur*** $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$***. Le vecteur*** $\vec{w}$ ***est appelé la résultante des vecteurs*** $\vec{u}$ ***et*** $\vec{v}$.

4.1.1 Construction de la résultante de vecteurs



4.1.2 Norme ou intensité du vecteur résultant de deux vecteurs

Si le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la norme $\|\vec{w}\|$ du vecteur résultant s'écrit $\|\vec{w}\| = w = \sqrt{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}$ (Théorème de Pythagore).

En particulier

- Si $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{®}{2}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des directions perpendiculaires (le triangle vectoriel est un triangle rectangle) on a $w^2 = u^2 + v^2$.
- Si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou $2k\pi$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, de même sens on a w = u + v.
- Si $(\vec{u}, \vec{v}) = ®$ ou $(2k + 1)\pi$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, de sens contraires on a w = u - v.

4.2 Le produit scalaire de deux vecteurs (symbole ò)

4.2.1 Définition

Le produit scalaire est l'opération qui associe à tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs, le réel ou scalaire $(\vec{u} \times \vec{v})$. (On lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »).

Exemple : Le travail W est un produit scalaire : c'est le produit scalaire du vecteur force $\vec{f}$ et du vecteur distance $\vec{l}$. W = $\vec{f} \times \vec{l} = \vec{f}.\vec{l}$

4.2.2 Valeur du scalaire résultant du produit scalaire de deux vecteurs

La valeur du scalaire W résultant du produit scalaire entre les vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{l}$ est donnée par la relation W = $\|\vec{f}\| \times \|\vec{l}\| \times \cos(\vec{f}, \vec{l})$.

En particulier :

Si $(\vec{f}, \vec{l})$ = 0 [$2k\pi$] les vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{l}$ sont colinéaires, de même sens et on a W = $\|\vec{f}\| \times \|\vec{l}\|$ > 0: le travail est moteur et sa valeur est maximale ($W = W_{max}$).

Si $(\vec{f}, \vec{l})$ = $\frac{\pi}{2}$ [$(2k + 1)\frac{\pi}{2}$] les vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{l}$ sont orthogonaux et on a W = $\|\vec{f}\| \times \|\vec{l}\|$ = 0 : le travail est nul (W = 0).

Si $0 < (\vec{f}, \vec{l}) < \frac{\pi}{2}$, $0 < W < W_{max}$ le travail est moteur.

Si $\left(\vec{f},\vec{l}\right)$ = π [(2k + 1)π] les vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{l}$ sont colinéaires, de sens contraires et on a W = - $\left\|\vec{f}\right\| \times \left\|\vec{l}\right\|$ < 0 : le travail est résistant et sa valeur est maximale négative (W = - W_{max}).

Si $\frac{\pi}{2} < \left(\vec{f},\vec{l}\right) < -\frac{\pi}{2}$, 0 < W < - W_{max} le travail est résistant.

Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$.

4.3 Le produit vectoriel (symbole ė)

4.3.1 Définition

Le produit vectoriel est l'opération qui associe à tout couple $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ ***de vecteurs le vecteur*** $\vec{u} \wedge \vec{v}$. (On lit « $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$ »).

4.3.2 Caractéristiques du vecteur résultant du produit vectoriel de deux vecteurs

- Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est déterminé par les caractéristiques suivantes :
- Sa direction est perpendiculaire au plan $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- Son sens est tel que le trièdre $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ soit direct
- Sa norme est $\mathrm{w} = \left\|\vec{\mathrm{u}} \wedge \vec{\mathrm{u}}\right\| = \left\|\vec{\mathrm{u}}\right\| \times \left\|\vec{\mathrm{v}}\right\| \times \sin\left(\vec{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{v}}\right)$

4.3.3 Propriétés du produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est le vecteur nul ($\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\vec{u},\vec{v}\right)$) = kπ

Le produit vectoriel n'est pas commutatif : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\,\vec{v} \wedge \vec{u}$

4.3.4 Exemple de produit vectoriel en physique : la force de Lorentz

Une particule de charge q, animée d'un mouvement de vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit une force magnétique $\vec{F}$ appelée force de Lorentz et telle que $\vec{F} = q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$.

III – LA NOTION DE TRIEDRE DIRECT

Un trièdre est une figure géométrique formée de trois demi-droites de même origine, mais non situées dans un même plan et limitée par les trois angles ayant ces demi-droites pour cotés.

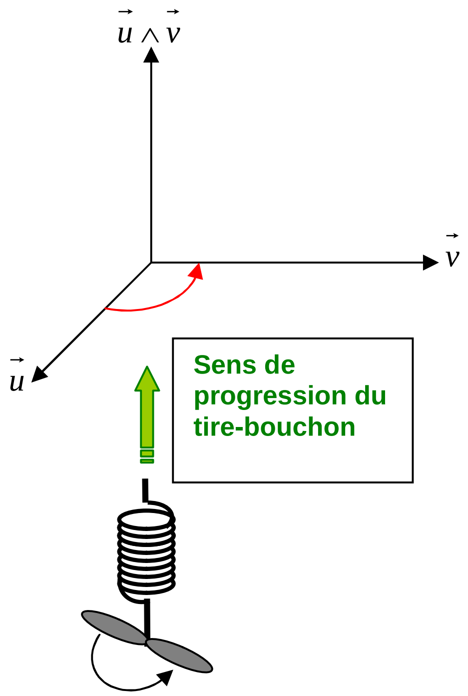
Le trièdre usuel est un repère orthonormé constitué de trois axes $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}\right)$ de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, rectangulaires deux à deux ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$). Il est direct et représente l'espace à trois dimensions.

Un observateur (bonhomme d'Ampère) couché suivant l'axe $\overrightarrow{Ox}$, la tête indiquant le sens de $\vec{i}$, passe de $\vec{j}$ à $\vec{k}$ dans le sens trigonométrique direct (sens contraire au sens de déplacement des aiguilles d'une montre).

On peut également vérifier qu'un trièdre est direct ou non par la règle des trois doigts de la main droite : pouce, index, majeur.

Pour trouver le sens du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on fait coïncider l'index et $\vec{u}$, le majeur (dirigé vers la paume de la main) et $\vec{v}$: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a le sens du pouce (dressé).

On peut aussi utiliser la règle du tire-bouchon de Maxwell : le tire-bouchon tourne dans le sens qui amène $\vec{u}$ sur $\vec{v}$, son sens de progression donne le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.



IV – LES DERIVEES

1. Exemple 1 : Soit la fonction x $\mapsto$ f(t) = at + b dans laquelle x est l'élongation, t la variable, a et b des constantes.

Pour une valeur t_1 de t on a la valeur x_1 de x telle que $x_1 = at_1 + b$.

Pour la valeur t_2 de t on a x_2 de x telle que $x_2 = at_2 + b$.

A la valeur $\Delta t = t_2 - t_1$ correspond la valeur $\Delta x = x_2 - x_1 = (at_2 + b) - (at_1 + b) \Rightarrow \Delta x = a(t_2 - t_1)$ ou $\Delta x = a\Delta t$. On en déduit $\frac{\Delta x}{\Delta t} = a$ et $\forall\ \Delta t \to 0$, la limite de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ est toujours égale à a. On écrit. Le même raisonnement pour d'autres valeurs de t, par exemple t_3 et t_2, t_4 et t_3, etc. on aboutit au même résultat.

2. Exemple 2 : Soit la fonction x $\mapsto$ f(t) = $at^2 + bt + c$, a, b et c sont des constantes.

Pour la valeur t_1 de t on a $x = x_1 = a t_1^2 + bt_1 + c$.

Pour la valeur t_2 de t on a $x_2 = x_2 = a t_2^2 + bt_2 + c$.

A la valeur $\Delta t = t_2 - t_1$ correspond la valeur $\Delta x = x_2 - x_1 = a t_2^2 + bt_2 + c - (a t_1^2 + bt_1 + c) \Rightarrow$ $\Delta x = a(t_2^2 - t_1^2) - b(t_2 - t_1)$. Comme $t_2^2 - t_1^2 = (t_2 - t_1)(t_2 + t_1)$ on a $\Delta x = a\Delta t(t_2 + t_1) + b\Delta t$.

On en déduit $\frac{\Delta x}{\Delta t} = a(t_2 + t_1) + b$. De la relation $\Delta t = t_2 - t_1$ on tire $t_2 = t_1 + \Delta t$ et l'on a alors $\frac{\Delta x}{\Delta t} = a(\Delta t + 2t_1) + b$. Pour $\Delta t \to 0$, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ tend vers sa limite qui est $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2at_1 + b$.

Ce raisonnement mené pour d'autres valeurs de t donne les valeurs correspondantes de $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, c'est-à-dire pour $\Delta t = t_3 - t_2$ on a $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2at_2 + b$, pour $\Delta t = t_4 - t_3$ on a $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2at_3 + b$, etc.

3. Conclusion

Dans les exemples précédents on a associé aux fonctions $x = bt + c$ et $x = at^2 + bt + c$, respectivement les fonctions $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = a$ et $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2at + b$ par une opération appelée fonction dérivée. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ est appelée la dérivée première (par rapport à la variable t) de la fonction $x = f(t)$.

La dérivée de la fonction x(t) est notée $\frac{dx}{dt}$ ou x' ou $\dot{x}$

La dérivée de la dérivée première $\frac{dx}{dt}$ d'une fonction x(t) est appelée la dérivée seconde de cette fonction et est $\frac{d^2x}{dt^2}$, x'' ou $\ddot{x}$.

Ainsi la dérivée première de la fonction $x = at + b$ est $\frac{dx}{dt} = a$ et celle de la fonction $x = at^2 + bt + c$, $\frac{dx}{dt}$ **$= 2at + b$**.

4. Dérivées des fonctions usuelles

x est une fonction de la variable t (temps)

Fonction x(t)	**Dérivée première**	**Dérivée seconde**
x = a = constante	**dx/dt = 0**	**$d^2x/dt^2 = 0$**

$x = at + b$	**$dx/dt = a$**	**$d^2x/dt^2 = 0$**
$x = at^2$	**$dx/dt = 2at$**	**$d^2x/dt^2 = 2a$**
$x = at^2 + bt + c$	**$dx/dt = 2at + b$**	**$d^2x/dt^2 = 2a$**
$x = t^n$ (n entier ou fractionnaire, positif ou négatif)	**$dx/dt = nt^{n-1}$**	**$d^2x/dt^2 = n(n - 1)t^{n-2}$**
$x = \sin t$	**$dx/dt = \cos t$**	**$d^2x/dt^2 = - \sin t$**
$x = \cos t$	**$dx/dt = - \sin t$**	**$d^2x/dt^2 = - \cos t$**
x =	**dx/dt =**	**$d^2x/dt^2 =$**

5. Dérivée d'une somme de fonctions

Soient les fonctions u = g(t), v = h(t) et x = u + v on a $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dv} + \frac{dv}{dt}$

6. Dérivée d'un produit de fonctions

Soient les fonctions u = g(t), v = h(t)

x = u.v on a $\frac{dx}{dt} = v.\frac{du}{dv} + u.\frac{dv}{dt}$; $x = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}}{v^2}$

x = sinu Ĝ $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$.cosu ; x = cosu Ĝ $\frac{dx}{dt} = - \frac{du}{dt}$.sinu

V - Formules d'addition

sin(a + b) = sinacosb + cosasinb	**sin(a - b) = sinacosb - cosasinb**
cos(a + b) = cosacosb - sinasinb	**cos(a - b) = cosacosb + sinasinb**

cosa + cosb = 2cos$\frac{a+b}{2}$ **cos**$\frac{a-b}{2}$ **b**		**cosa - cosb = 2sin**$\frac{a+b}{2}$ **sin**$\frac{a-b}{2}$ **b**
sina + sinb = 2cos$\frac{a+b}{2}$ **sin**$\frac{a-b}{2}$ **b**		**sina - sinb = 2sin**$\frac{a+b}{2}$ **cos**$\frac{a-b}{2}$ **b**
sin2a = 2cosasina	**cos2a**	**sin**^{2}**a + cos**^{2}**a = 1**

VI - Progression arithmétique

On appelle progression mathématique la suite de nombre u_n telle que $u_n = u_{n-1} + r$.

Le nombre r est appelé la raison de la progression.

Exemple : La suite des entiers impairs : $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$, $u_4 = 7$, etc. forme une progression arithmétique de raison r = 2.