GENERALITES DE LA CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

Objectifs : L'élève doit être capable de :

- *définir la cinématique*
- *définir le mobile*
- *définir un référentiel*
- *citer des exemples de référentiel*
- *définir un repère (spatial, temporel)*
- *citer des exemples de repère*
- *décrire le repère choisi, pour la description d'un mouvement*
- *définir la trajectoire d'un mouvement*
- *définir une trajectoire rectiligne, curviligne, circulaire*
- *définir un mouvement rectiligne*
- *établir les équations cartésiennes de la trajectoire à partir d'équations paramétriques du mouvement dans les cas simples (droite, parabole, cercle)*
- *définir l'équation horaire d'un mouvement*
- *définir les vecteurs vitesses moyenne et instantanée, accélérations moyenne et instantanée*
- *écrire les coordonnées cartésiennes et curvilignes du vecteur position dans un repère*
- *écrire les expressions des vecteurs vitesses (moyenne et instantanée), des vecteurs accélérations (moyenne et instantanée) d'un mobile dans un repère cartésien et dans un repère curviligne*
- *citer les propriétés du vecteur vitesse*
- *donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un mouvement soit accéléré, décéléré, uniforme*
- *définir un mouvement uniforme, accéléré, retardé (ou décéléré)*
- *déterminer la nature d'un mouvement à partir des équations paramétriques*
- *tracer les diagrammes des équations horaires.(position, vitesses, accélération) dans un repère à deux dimensions*

A. Définition de la cinématique

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement des corps en fonction du temps et indépendamment des causes (force) qui le produisent

B. Référentiel

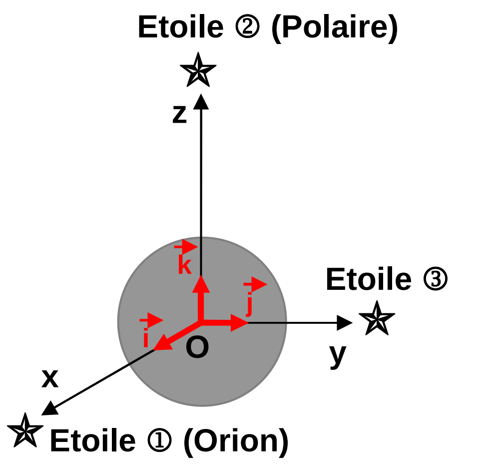
L'état de repos ou de mouvement d'un corps est essentiellement relatif. Un messager assis dans une voiture voyageant entre Bamako et Fana est au repos par rapport à la voiture (et aux autres passagers) et en mouvement par rapport au paysan qui attend au bord de la route le passage du véhicule pour traverser la route. Le paysan affirmera que la voiture est en mouvement tandis que le passager lui trouverait que le paysan est en mouvement.
Chacun de nous connaît cette impression du passager qui voit les arbres défiler en sens inverse du mouvement du véhicule. On dit que le mouvement a un caractère relatif.
On comprend alors qu'un mouvement ne peut se définir que par rapport à un corps.

I. Définition

On appelle référentiel le corps ou l'ensemble de corps par rapport auquel on étudie le mouvement d'un corps.
Il est donc indispensable de préciser le référentiel dans lequel on observe un mouvement.

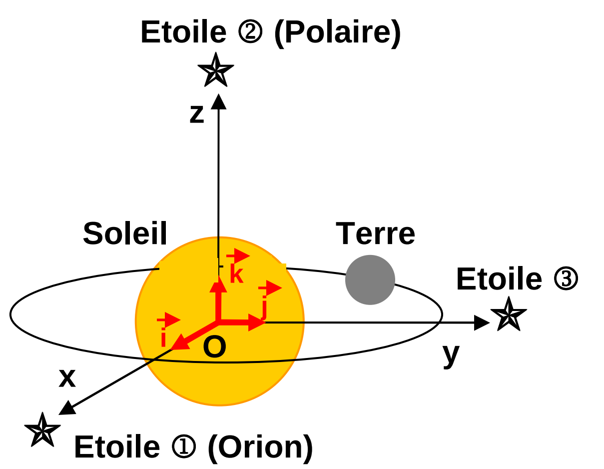
II. Exemples de référentiels

1. **Le référentiel terrestre** : appelé aussi référentiel de laboratoire il est toujours choisis lié à la terre et est bien adapté à l'étude locale des mouvements se produisant à la surface de la terre (mouvements de véhicules, etc.).
2. **Le référentiel géocentrique** : encore appelé référentiel de Coriolis est adapté aux études des mouvements des satellites, et en général aux mouvements autour de la terre. Il est constitué par la terre et trois étoiles très éloignées (Fig. 1).
3. **Le référentiel de Copernic** : il est formé par le système solaire et trois étoiles très éloignées. Il est utilisé pour l'étude des mouvements des planètes, des étoiles, des comètes (Fig. 2).



Référentiel géocentrique (ou de Coriolis)

Fig. 1



Référentiel de Copernic

Fig. 2

C – Repères

La description d'un mouvement dans un référentiel choisis se fait dans un repère : « marque (signe, objet matériel) qui sert à retrouver un emplacement, un endroit, à localiser un phénomène ».

Pour étudier complètement le mouvement d'un mobile, il faut déterminer à quel instant se trouve le mobile dans une position donnée. Il faut donc définir une position origine dans un repère d'espace et un instant origine dans un repère de date, liés au référentiel d'étude choisis.

En cinématique le repère d'espace permet de déterminer la position du mobile par rapport à une position arbitrairement choisie comme origine. Il est généralement déterminé par une origine O des espaces, liée au référentiel et une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le plus souvent orthonormée. Le repère est toujours choisi dans le référentiel.

I. Repères d'espace

Les repères d'espace utilisés en cinématique sont les suivants :

1. Repère $(O, \vec{i})$ (Fig. 3) : lié à une origine O et constitué d'un axe $\overrightarrow{Ox}$ de vecteur unitaire $\vec{i}$.
Ce repère constitue l'espace à une dimension. Cet espace est représenté par la droite.

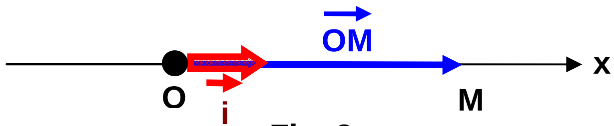


Fig. 3

2. Repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (Fig. 4) : lié à une origine O et constitué de deux axes rectangulaires $\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy}$ de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Ce repère constitue l'espace à deux dimensions. Cet espace est représenté par le plan.

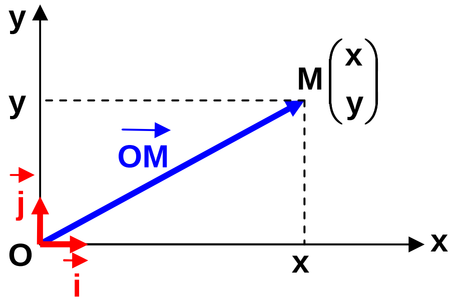


Fig. 4

3. Repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ (Fig. 5) ; lié à une origine O et constitué de trois axes rectangulaires de vecteurs unitaires respectifs $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Ce repère constitue l'espace à trois dimensions (longueur, largeur, profondeur ou hauteur).

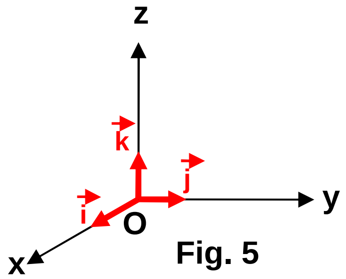


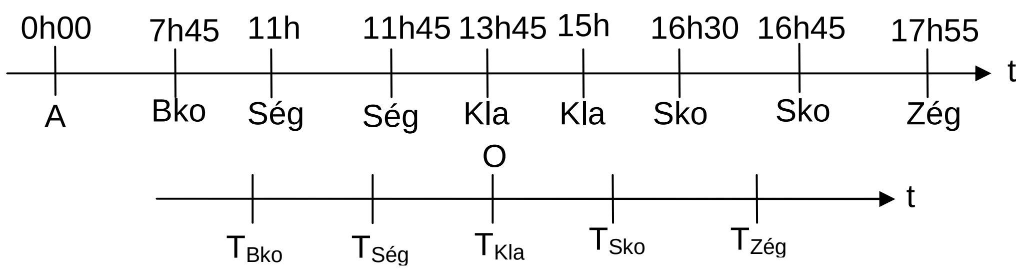
Fig. 5

II. Repère de date

Le repère de date permet de «chronométrer» le mouvement du mobile. L'origine des dates correspond à l'instant où l'on déclenche le chronomètre.
Le choix de l'origine des temps est totalement arbitraire. Les musulmans ont comme origine des temps l'instant de l'événement « départ du Prophète Mohamed (PSL) de la Mecque (Hégire)) tandis que les chrétiens ont l'événement « la naissance du Chris t ». L'instant est le moment d'un événement (le moment où je regarde ma montre par exemple).
Le choix de l'origine des dates s'il est arbitraire, permet de s'éviter des manipulations trop lourdes. En effet il ne serait pas astucieux de choisir comme origine des dates pour l'événement « chute d'un morceau de craie en classe » la date de naissance du Christ.
L'instant qui sépare un instant considéré de l'instant pris arbitrairement comme origine est la date. La durée est un intervalle de temps entre deux évènements (la durée de la seconde guerre mondiale).
Lorsqu'on connaît t_1 et t_2 de deux évènements la durée qui les sépare si t_1 est inférieur à t_2, dans un repère temporel, est $\Delta t = t_2 - t_1$ (par exemple la durée de la deuxième guerre mondiale est 1945 – I936 = 9 ans.
L'unité de date est la seconde (s).
D'autres unités de temps sont aussi utilisées : l'année (moyenne) = 365,25 jours (j) ; 1j = 86400s ; 1 heure (h) = 60 min = 3600s ; la milliseconde (ms) = 10^{-3}s.
La date est une grandeur algébrique. Tous les évènements qui ont eu lieu après l'instant considéré comme origine des dates ont une date positive et ceux qui ont lieu avant cet instant ont des dates comptées négativement.
Les origines de repère de date (ou de temps) et d'espace ne coïncident pas forcément.

Le choix des origines d'espace et de temps doit se faire de telle manière à se faciliter l'étude du mouvement concerné. Il est évident que l'on ne prendra pas pour origine des dates dans l'étude de la chute d'un morceau de craie en classe la date de naissance du prophète Mahomet (PSL). Il est d'ailleurs plus astucieux ici de faire coïncider (sauf indications contraires obligatoires) les deux origines c'est à dire prendre pour origine des temps l'instant de lâcher du morceau de craie.

<u>Exercice résolu</u> : Un camion quitte Bamako à 7h 45 min. Il arrive à Segou à 11h. Après 15 min de pause, il poursuit sa route sur Koutiala où il arrive à 13h 45 min. Après le déjeuner et une courte sieste, le chauffeur reprend la route à 15h et parvient à Sikasso à 13h 30 min. Il met 15 min pour traverser la ville de Sikasso et se dirige à Zégoua où il arrive à 1h 10 min plus tard. En prenant pour origine des dates l'instant où le camion arrive à Koutiala, calculer en minutes T Bko date de départ de Bamako ainsi que les dates d'arrivée $T_{Ség}$, T_{Kla}, T_{Sko} et $T_{Zég}$ respectivement à Segou, Koutiala, Ségou et Zégoua.
<u>Solution</u> : Les horaires sont des dates repérées par rapport à 00 h 00 min, début du jour où a lieu le voyage. On a représenté sur l'axe At (A étant l'origine des temps 00 h 00 min du jour de voyage) les différentes informations temporelles de l'énoncé et sur l'axe Ot les dates T_{Bko}, $T_{Ség}$, T_{Kla} , T_{Sko} et $T_{Zég}$. (O étant l'origine des temps dans le nouveau repère, c'est à dire l'arrivée à Koutiala).



Dans le repère Ot on a :
T_{Kla} = 00 min ; T_{Bko} = -(13 h 45 min – 7 h 45 min) = - 6 h = - 360 min
$T_{Ség}$ = - (13 h 45 min – 11 h) = - 2h 45 min = - 165 min
T_{Sko} = + (16 h 30 min – 13 h 45 min) = +2 h 45 min = + 165 min
$T_{Zég}$ = + (17 h 55min – 13 h 45 min) = + 4 h 10 min = + 250 min.

Nota Bene : Pour définir complètement le mouvement d'un mobile dans un référentiel donné il faut se choisir :

- un repère spatial orthonormé [(O, i, j, k), (O, i, j) ou (O, i)] attaché au référentiel, et
- un repère temporel.

III. Trajectoire d'un mobile

1. Le mobile : **est le *corps* qui effectue le mouvement**.

Il est en général représenté par un ***point matériel***.

2. La trajectoire du mobile :

2.1. **Définitions** : ***La trajectoire du mobile est la courbe décrite par le mobile dans l'espace pendant le mouvement dans le repère choisi au cours du temps***.

La trajectoire du mobile est le lieu géométrique des positions successives du mobile par rapport au repère choisi lors du mouvement au cours du temps.

2.2. **Natures d'une trajectoire**

Lorsque la trajectoire du mobile dans un repère est une ***droite***, elle est ***rectiligne*** et le ***mouvement est dit rectiligne***.

Lorsque la trajectoire du mobile dans un repère est une ***courbe (une non droite)***, elle est ***curviligne*** et le ***mouvement est dit curviligne***.

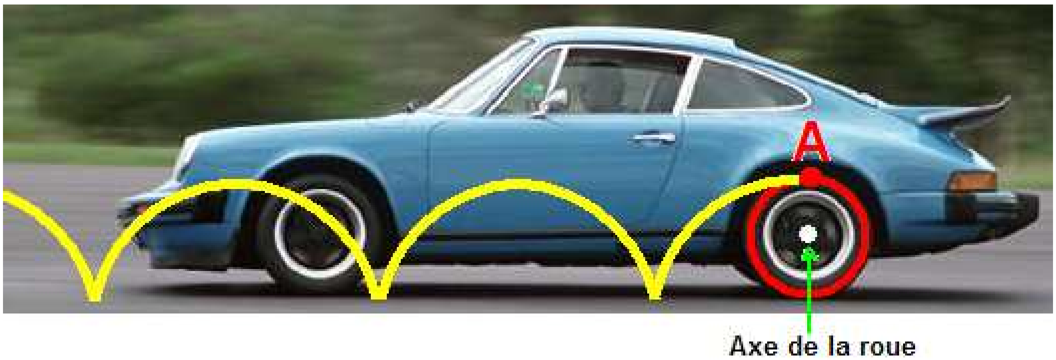
En particulier si la courbe est un ***cercle (ou un arc de cercle)*** le ***mouvement est circulaire*** et ***parabolique*** si la ***trajectoire est une parabole***.

Un point d'un tire-bouchon, d'une vis ou d'un écrou effectue à la fois un mouvement circulaire et un mouvement rectiligne ; sa trajectoire est dite ***hélicoïdale***.

La trajectoire du mobile dépend du référentiel choisi et est déterminé dans un repère donné.

Exemple : Une voiture circule sur une voie rectiligne. Quelles sont, par rapport à un repère lié à la route, puis de la roue arrière, les trajectoires d'un point A de cette roue ?

Par rapport à l'axe de la roue le mouvement de A est circulaire (cercle en rouge). Par contre le point A, par rapport à la route, décrit une courbe appelée cycloïde (courbe en jaune).



3. Equation de la trajectoire : Vecteur position $\overrightarrow{OM}$ (Fig. 6)

Soit M un point mobile et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère choisi. La position de M à chaque instant est donné par les composantes ou coordonnées x, y et z du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

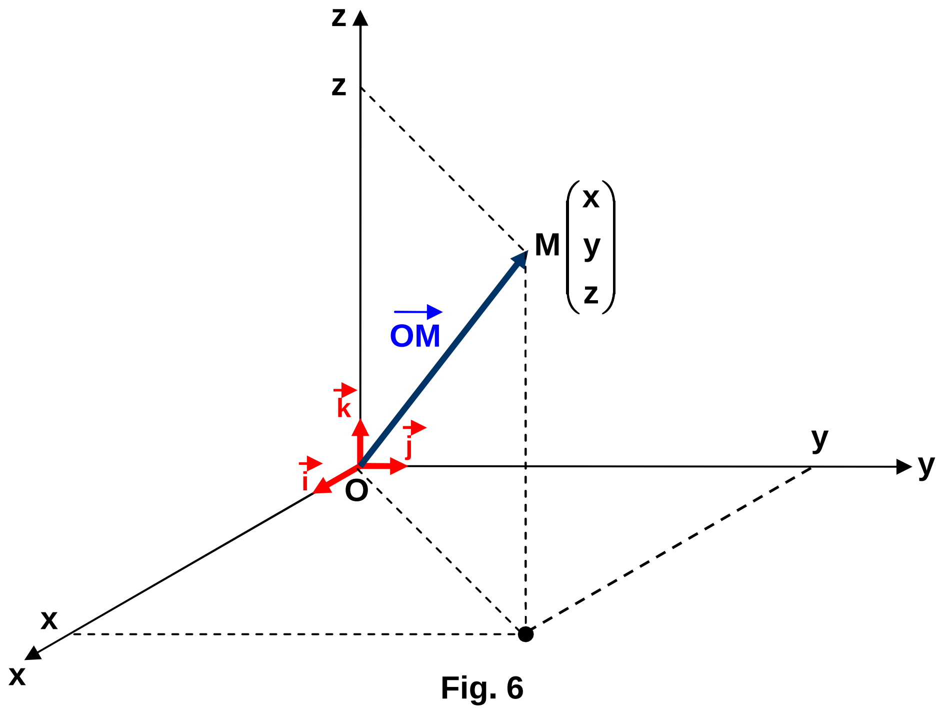


Fig. 6

On écrit :

$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ avec $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. x, y et z du vecteur sont les coordonnées cartésiennes du point M. Elles sont fonctions du temps si M est en mouvement. Les fonctions temporelles x = f(t), y = g(t) et z = h (t) sont appelées les équations paramétriques ou équations horaires du mouvement.

L'équation de la trajectoire est la relation liant les coordonnées x, y et z du mobile. On l'obtient en éliminant la variable temps t entre les équations paramétriques. Les coordonnées x, y et z sont encore appelées abscisses ou élongations du mobile.

Exercice résolu : La position d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donné, à chaque instant par $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = 2t \\ y = 4t^2 + 3 \\ z = 0 \end{vmatrix}$. Quelle est la trajectoire du mouvement du point M ? Quelle est la nature du mouvement ?

Solution :

Equation de la trajectoire

L'équation de la trajectoire est obtenue en éliminant t entre les équations horaires x, y et z.

On a x = 2t $\Leftrightarrow$ $x = \frac{t}{2}$. Porté dans l'expression de y on obtient $y = 4x\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 3$ $\Leftrightarrow$ y = x^2 + 3 : équation de la trajectoire.

Nature du mouvement

$y = x^2 + 3$ est l'équation d'une ***parabole*** $\Leftrightarrow$ ***le mouvement de M est parabolique***.

2. Coordonnées curvilignes : abscisse curviligne : $\overset{\frown}{M_0M}$ (Fig. 7)

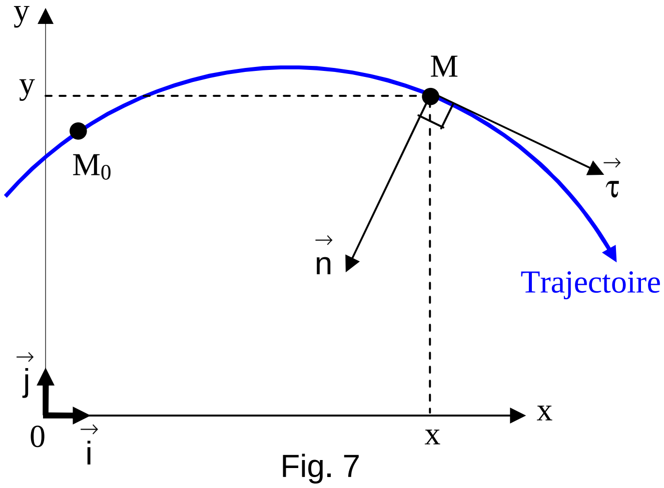


Fig. 7

La trajectoire du mobile est une courbe non droite, on peut donc l'orienter et choisir un point M_0 origine des espaces sur la trajectoire.

La position de M à tout instant $\overset{\frown}{M_0M}$ est alors déterminée par la mesure de l'arc orienté.

La valeur algébrique $\overset{\frown}{M_0M}$ de l'arc $\overset{\frown}{M_0M}$ orienté est l'abscisse curviligne du point M.

On note **s =** $\overset{\frown}{M_0M}$

L'abscisse curviligne s est une fonction du temps : s = f(t) et est appelée équation horaire du mouvement. s est l'élongation du mobile.

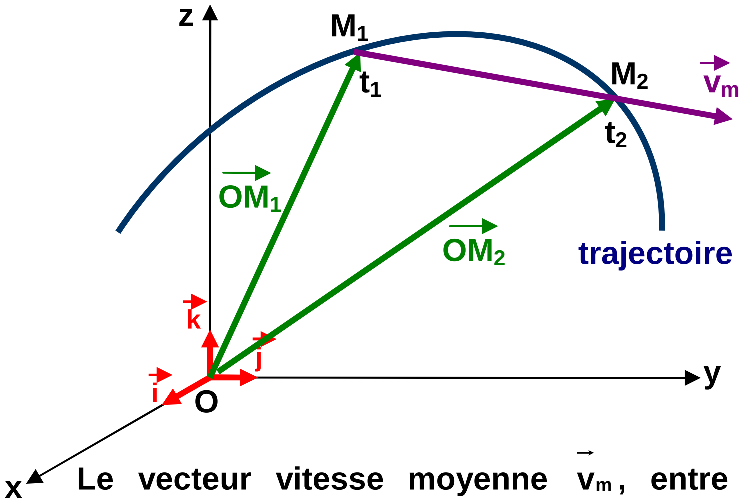
3. Le vecteur vitesse

3.1. Vecteur vitesse moyenne $\vec{V}_{moy}$ (Fig. 8)

3.1.1. Définition

Soient à un instant t_1, M_1 la position d'un mobile M en mouvement et M_2 sa position à l'instant t_2 : on appelle vecteur vitesse moyenne V_m du mobile l'accroissement moyen du vecteur espace entre les instants t_1 et t_2

La vitesse moyenne du mobile sur un parcours donné est le quotient de la distance parcourue sur la durée de parcours.



Le vecteur vitesse moyenne $\vec{v}_m$, entre les instants t_1 et t_2, est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$

Fig. 8

3.1.2. Caractéristiques :

Le vecteur vitesse moyenne est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

3.1.3. Coordonnées du vecteur vitesse moyenne :

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on a $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \left| \begin{matrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{matrix} \right.$

Les coordonnées du vecteur vitesse moyenne sont : $\vec{V}_{moy} \left| \begin{matrix} \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \\ \dfrac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta z}{\Delta t} \end{matrix} \right.$ avec $x_2 - x_1 = \Delta x$, $y_2 - y_1 = \Delta y$, $z_2 - z_1 = \Delta z$, $t_2 - t_1 = \Delta t$ les accroissements des grandeurs concernées.

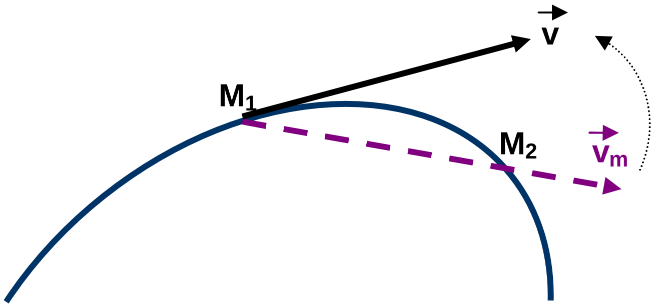
3.1.4. Quelques exemples de vecteur vitesse moyenne

La vitesse moyenne d'un piéton ordinaire est de 4 à 5 Km/h ; celle du son dans l'air dans les conditions ordinaires est 330Km/s. ou 1200Km/h ; celle de la lumière dans un milieu transparent est de l'ordre de 200000Km/s ; celle des électrons dans un fil de cuivre parcouru par un courant est de l'ordre de 0,1 mm/s. La vitesse moyenne d'un bateau est environ une dizaine de nœuds (le nœud est une unité de vitesse utilisée en navigation et correspondant à 1852 m/s soit 18Km par h). La vitesse moyenne de la lumière dans le vide est une constance universelle égale à 300000 Km/s. Aucun corps matériel ne peut atteindre cette valeur à fortiori la dépasser.
Le soleil et le système solaire se déplacent à la vitesse de 17280000 km/jour.

3.2. Le vecteur vitesse instantané ou vitesse $\vec{v}$ du mobile :

La valeur de la vitesse moyenne donne des renseignements uniquement sur l'allure moyenne du mobile sur l'ensemble du parcours. Elle ne peut fournir aucun renseignement sur la valeur de la vitesse du mobile à un instant donné.
Dans le cas des véhicules c'est le compteur de vitesse encore appelé tachymètre qui renseigne le conducteur sur la valeur du véhicule à chaque instant. La valeur indiquée par le compteur de vitesse est encore appelée vitesse instantanée ou tout simplement vitesse du véhicule à l'instant indiqué.

3.2.1. Définition :



Lorsque M_1 se rapproche de M_2, la direction de $\overrightarrow{M_1M_2}$ tend vers tangente à la trajectoire au point M_1

Fig. 9

Si dans l'expression du vecteur vitesse moyenne on fait tendre t2 vers t1 alors tend vers une limite notée $\vec{v}$ telle que $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t}$. On reconnaît dans cette expression mathématique de la dérivée du vecteur espace par rapport au temps. Par conséquent on a $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$.

Le vecteur vitesse instantanée ou vitesse d'un mobile est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

3.2.2. Caractéristiques du vecteur vitesse :

- Sa direction est à chaque instant tangente à la trajectoire
- Son sens est le sens du mouvement du mobile
- Son intensité indique à chaque instant la vitesse du mobile.

3.2.3. Expression du vecteur vitesse :

Dans la base cartésienne $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et comme $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$ on aura donc $\vec{v} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt}$. Or les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs constants indépendants du temps, par conséquent $\vec{v} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}$. $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ sont les dérivées respectives des élongations x, y et z par rapport au temps.

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est déterminé dans la base cartésienne $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par les composantes v_x, v_y et v_z. $\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \\ v_z = \frac{dz}{dt} \end{array}\right.$ avec $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$. Son intensité est donnée par la relation

$\mathbf{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$ et s'exprime dans le système international en mètre par seconde (m/s ou m.s).

Exercice résolu : La position d'un point M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est donnée, à chaque instant par : $\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 4t^2 + 3 \\ z = 0 \end{array}\right.$. Calculer les composantes et l'intensité du vecteur vitesse du mobile aux instants t = 0 s ; t = 1 s ; t = 2 s ; t = 3 s ; t = 4 s. Représenter ce vecteur sur la trajectoire aux instants 0, 1, 2, 3, 4 s.

Solution

Composantes du vecteur vitesse

Elles sont obtenues en dérivant les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, ce qui donne, à l'instant t : $\vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 2 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 2t \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{array}\right.$. Intensités de v pour t = 0 s ; t = 1 s ; t = 2 s ; t = 3 s et t = 4 s ?

On obtient la valeur des composantes en donnant à t ses valeurs successives.

L'intensité du vecteur est donnée par la relation $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

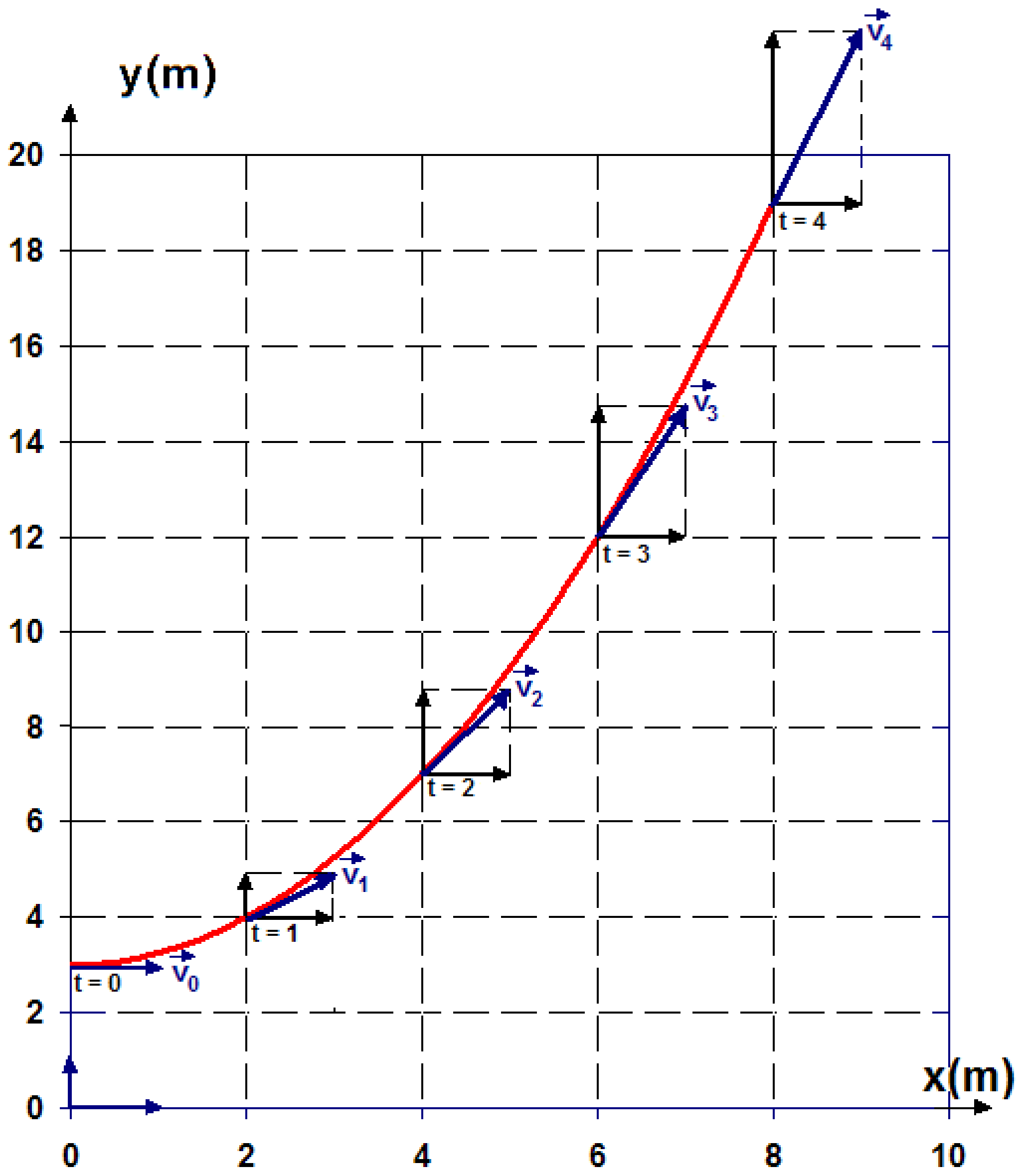
Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous.

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
V_x	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
V_y	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**
V_z	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
V(ms)	**2**	**2,82**	**4,47**	**6,32**	**8,24**

Représentation

$z = 0 \Leftrightarrow$ la base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ suffit comme repère. L'équation de la trajectoire est $y = \dfrac{x^2}{4} + 3$: la trajectoire est parabolique.

Le vecteur vitesse est à chaque instant tangent à la parabole (voir ci-dessous).



4. **Vecteur accélération**

4.1. Vecteur accélération moyenne $\vec{a}_{moy}$ ou $\vec{\gamma}_{moy}$

4.1.1. Définition

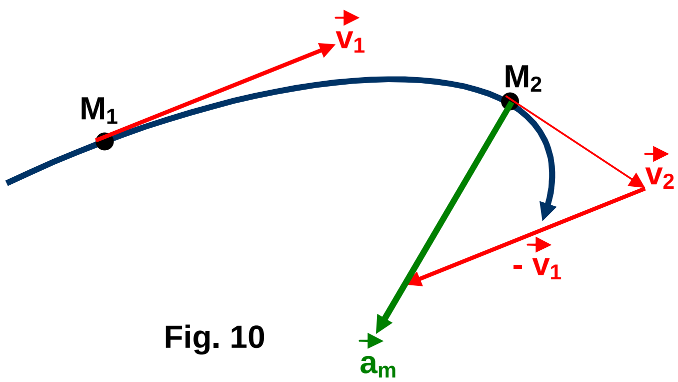


Fig. 10

Soient v_1 et v_2 les vecteurs vitesse respectifs aux instants t_1 et t_2 correspondants aux positions M_1 et M_2 du mobile M.

On appelle vecteur accélération moyenne $\vec{a}_{moy}$ ***du mobile l'accroissement moyen du vecteur entre les instants t_1 et t_2 :*** $\vec{a}_{moy} = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_2}{t_2 - t_1}$.

4.1.2. Caractéristiques du vecteur accélération moyenne

Le vecteur accélération a la direction et le sens de $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$.
Le vecteur accélération moyenne est toujours dirigé vers le centre de la concavité de la trajectoire.
La norme du vecteur accélérateur s'exprime, dans le système international, en mètre par seconde carré ($m.s^{-2}$).

4.2. Vecteur accélérateur instantanée $\vec{a}$ ou $\vec{\gamma}$

4.2.1. Définition :

Pour trouver le vecteur accélérateur instantanée ou tout simplement vecteur accélération noté généralement $\vec{a}$ ou $\vec{\gamma}$ il suffit dans le cas de la vitesse, de faire tendre t_2 vers t_1. On a alors $\vec{a} = \lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$: expression mathématique de la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps et notée $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$.

On appelle vecteur accélération instantanée ou tout simplement vecteur accélération d'un mobile le vecteur dérivée par rapport au temps : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$. ***On peut également le définir comme étant le vecteur dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps***.

$$\text{En effet } \begin{cases} \vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ \text{et} \\ \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

4.2.2. Les composantes du vecteur accélération :

- Composantes dans le repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{array} \right.$

4.2.3. Intensité : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Le vecteur accélération caractérise les variations (de direction, de sens et d'intensité) du vecteur vitesse.

- Composantes dans la base curviligne (repère de Frenet)

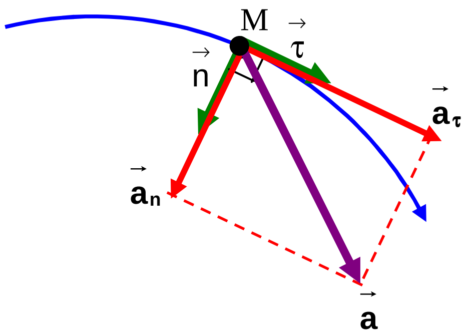


Fig. 11

On peut choisir dans le cas de la trajectoire curviligne un repère de Frenet ayant pour origine la position M du mobile à l'instant t et pour vecteurs unitaires les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ respectivement tangent et normal à la trajectoire ($\vec{\tau} \perp \vec{n}$). Le vecteur accélérateur s'écrit dans ce repère : $\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$. ***Les vecteurs*** $\vec{a}_\tau = a_\tau \vec{\tau}$ ***et*** $\vec{a}_n = a_\tau \vec{n}$ ***sont appelés respectivement vecteur accélérateur tangentielle et vecteur accélérateur normale***.

La composante tangentielle $\vec{a}_\tau$ du vecteur accélérateur caractérise les variations de l'intensité du vecteur vitesse. Son intensité est $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$.

La composante normale a_n du vecteur accélérateur caractérise les variations de direction du vecteur vitesse. Son intensité est $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ où v est le module de la vitesse et ρ le rayon de courbure de la trajectoire.
Si la trajectoire est une droite (mouvement rectiligne) $\rho \to 0$ on $\mathbf{a_n = 0}$ et $\mathbf{a = a_\tau}$.

Si la trajectoire est un cercle (mouvement circulaire) de rayon ρ = R : $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

5. Le mouvement accéléré, le mouvement décéléré, le mouvement uniforme

Un mouvement est accéléré lorsque l'intensité du vecteur vitesse augmente au cours du temps. Il est décéléré ou retardé dans le cas contraire.
Pour un mouvement accéléré, les vecteurs accélération et vitesse ont même sens $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \times \vec{v} \succ 0$.
Inversement le **mouvement est décéléré si les vecteurs accélération et vitesse sont de sens contraires** $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \times \vec{v} \prec 0$.
Un mouvement est dit uniforme si le produit scalaire des vecteurs vitesse et accélération est nul $\vec{a} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$ **soient :**
$\vec{a} = 0$ **et** $\vec{v} = \overrightarrow{Constante} \neq 0$ **: on dit que le mouvement est rectiligne uniforme.**

$\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \perp \vec{a}$ (c'est-à-dire $\left(\vec{v}, \vec{a}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$) : le vecteur vitesse a un module constant mais le vecteur vitesse lui-même change de direction. Le mouvement du mobile est circulaire uniforme.

Evaluation

I. Un axe vertical Δ tourne à vitesse constante. Un objet ponctuel C est accroché à l'axe par l'intermédiaire d'un fil AC de masse négligeable et de longueur l = 1 m. Quelle est la nature du mouvement de C lorsque le fil fait un angle θ avec l'axe Δ. Préciser les caractéristiques de la trajectoire décrite par C lorsque l'angle que fait le fil avec Δ est $\theta = 30°$.

II. Les équations paramétriques d'un mobile sont : $\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{2}t^2 \\ z = 0 \end{cases}$

1. Le mouvement du mobile est-il plan ? Pourquoi ?
2. Déterminer :

   a) le module du vecteur à l'instant t. A.N. : t = 0.
   b) Le module du vecteur accélérateur à un instant t quelconque. Conclure.
3. Quelle est l'équation de la trajectoire de ce mobile ?

Le mouvement d'une cage d'ascenseur comporte trois phases :

- Le démarrage ;
- La montée à vitesse constante ;
- L'arrêt.

Préciser la nature du mouvement de l'ascenseur pour chaque phase.

III. L'équation horaire d'un mobile en mouvement sur un axe x'Ox est $x = 3t - 1$ (m). Quelle est la nature de la trajectoire ? Déterminer le module, le sens et la direction du vecteur vitesse de ce mobile.

IV. L'équation paramétrique d'un mobile en mouvement rectiligne est $x = 1/2t^2 + 2t + 1$
1. Quelle est l'équation de sa trajectoire ?
2. Déterminer :
   a) La position initiale du mobile
   b) La vitesse initiale du mobile
   c) Le module de l'accélération à un instant quelconque. Conclure.
3. Calculer la vitesse moyenne V_m du mobile entre les instants $t_1 = 0$ s et $t_2 = 2$s.
4. Calculer les vitesses V_1 et V_2 du mobile aux instants $t_1 = 0$s et $t_2 = 2$s. Comparer V_1 et V_2 à V_m. Conclure.

V. L'équation horaire de l'abscisse x d'un mobile en mouvement rectiligne est $x = t^4 - 2t$ (m).
1. Comment peut-on repérer le mouvement de ce mobile ?
2. Déterminer :
   a) le module du vecteur vitesse à l'instant t = 0,5 s ;
   b) le module du vecteur accélération à l'instant t = 0 s.
3. Donner l'équation de la trajectoire du mobile.
4. Déterminer les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré, retardé.

VI. Soit la relation $v^2 = kg(x - x_0)$ exprimant la vitesse instantanée v d'un mobile en mouvement rectiligne, en fonction de sa position x, du temps et des constantes k, g et x_0.
Déterminer la valeur de l'accélération du mobile. A.N. : k = 1/4 et g = 10 m/s2.

VII. Les équations horaires d'un mobile M sont : $\begin{cases} x = 2\cos \pi t \\ y = 2\sin \pi t \\ z = 0 \end{cases}$

1. Montrer que le mouvement de ce mobile dans un plan et que sa trajectoire est un cercle dont on précisera le rayon. (On rappelle que l'équation d'un cercle est de la forme $a^2 + b^2 = R^2$).

2. Déterminer :
   a) le module du vecteur vitesse à l'instant t ;
   b) le module du vecteur accélération à l'instant t.

3. Montrer que le vecteur accélérateur $\vec{a}$ est à chaque instant colinéaire et de sens contraire au vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du mobile.

VIII. Les équations horaires du vecteur vitesse d'un mobile à un instant t quelconque sont données par $v_x = 0,1$ et $v_y = 0,2\,t$ en m/s.
Déterminer les équations horaires x(t) et y(t) des coordonnées de ce mobile à l'instant t sachant qu'à t = 0 s, le mobile se trouve en un point de la trajectoire de coordonnées $x_0 = 0,1$ m et $y_0 = 0,1$ m.

IX. Les coordonnées cartésiennes d'un mobile M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ sont données par x = cost et y = sint (en cm).
1. Préciser la trajectoire C_0 de M dans ce repère
2. Soit le vecteur $\overrightarrow{O\Omega} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Déterminer les coordonnées de M dans le repère $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On effectue une rotation de centre O et d'angle $\pi/4$ radian d repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ dans le sens contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre. On obtient un nouveau repère $\left(O, \vec{i_1}, \vec{j_1}\right)$.

   a) Déterminer les coordonnées du mobile M dans le repère $\left(O, \vec{i_1}, \vec{j_1}\right)$?

   b) Préciser la trajectoire de M dans le repère $\left(O, \vec{i_1}, \vec{j_1}\right)$.